
МАТЕМАТИКА
Я ПОЗНАЮ МИР
2×2=5
h
abc
КОЛА

Я ПОЗНАЮ МИР

Детская энциклопедия

Математика



МОСКВА
АСТ
1998

ББК 22я2
Я11
УДК 51(031)

Авторы-составители
канд. физ.-мат. наук *А. П. Савин,*
В. В. Станцо, А. Ю. Котова

Под общей редакцией *О. Г. Хинн*

Художники
А. В. Кардашук, А. Е. Шабельник,
А. О. Хоменко

Я11 Я познаю мир: Детская энциклопедия: Математика / Сост. А. П. Савин, В. В. Станцо, А. Ю. Котова: Под общ. ред. О. Г. Хинн; Худож. А. В. Кардашук, А. Е. Шабельник, А. О. Хоменко. — М.: ООО «Издательство АСТ-ЛТД», 1998.— 480 с.
ISBN 5-15-000286-0

«Математика» — очередной том новой популярной энциклопедии для детей издательства АСТ «Я познаю мир».

Об истории развития математики и великих ученых, о различных логических и компьютерных играх и задачах и даже о том в каком банке лучше хранить деньги рассказывают юным читателям авторы.

Об уникальности и неординарности книги говорит тот факт, что весь авторский коллектив уже много лет сотрудничает в популярном математическом журнале для детей — «Квант».

Издание хорошо иллюстрировано, снабжено предметно-именным указателем, что позволяет использовать его как справочник. Рекомендуется в качестве дополнительного пособия для учащихся младших и средних классов школ, лицеев и гимназий.

Я 5100000000 ББК 22я2

ISBN 5-15-000286-0

ЭТА СТРАННАЯ НАУКА

Что было раньше, курица или яйцо, — вопрос многовековой и изрядно надоевший. А вот что бывает раньше — математическая теория или потребность в ней?

Разумеется, часто бывает, что требования практики подталкивают развитие математики. Яркие примеры тому — теории, созданные М.В.Келдышем для авиаконструкторов. Частенько понятия математики возникали из необходимости, — так было с векторами, логарифмами, тригонометрией... Но часто математика «варится в собственном соку», а потом вдруг оказывается, что как ни долго она была оторвана от жизни, а в дебри неправдоподобия ее все же не занесло! Хрестоматийный пример — конические сечения Аполлония, неоднократно упоминающиеся на этих страницах. А вот еще пример: Поль Дирак, решая выведенные им уравнения, получил два ответа: с плюсом и с минусом. Одному из этих ответов соответствовал хорошо знакомый физикам электрон. Но что делать со вторым ответом? Может, уравнения были неверны? Как бы не так! Вскоре был открыт позитрон, отличающийся от электрона только знаком электрического заряда!

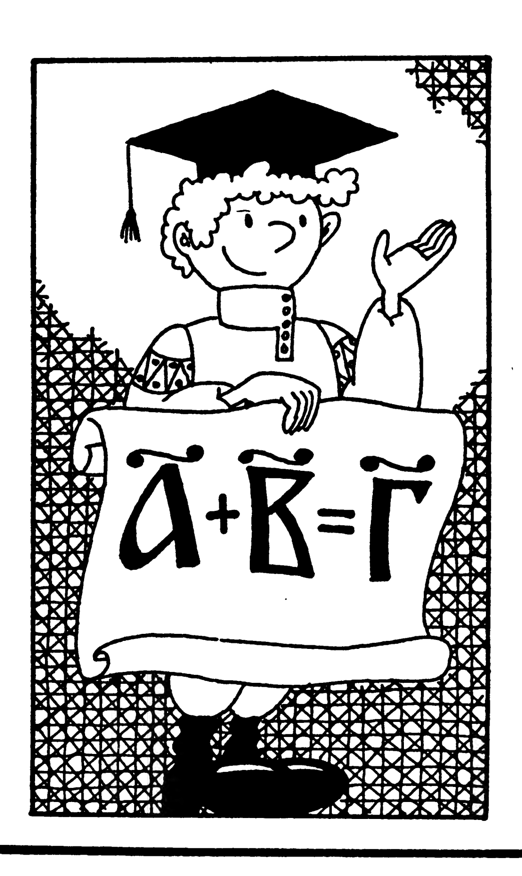
Тут поневоле задумаешься: что же это за

наука такая? От реального мира оторвана, имеет дело сплошь и рядом с такими объектами, которые невозможно себе представить, развивает самое себя по своим внутренним законам — а правду говорит, если случайно соприкоснется с жизнью! Этакий параллельный мир...

Может быть, математика — где-то там, в иных измерениях, глазом не видных, — записана вся и мы лишь достаем все новые факты из дыры между мирами? (Говорят ведь, что Мандельштам не сочинял стихов, а слышал их внутренним слухом и только записывал музыку высших сфер. Может, и математики так же?) Или логика, созданная человеческим разумом, настолько земная, что не может оторваться от земли, а нам лишь кажется, что реальность затерялась далеко внизу?... Бог весть; но выходит, что если физикам, химикам, экономистам или археологам потребуется новая модель устройства мира, эту модель всегда можно либо достать с полки, куда ее лет триста назад забросили математики, либо собрать из деталей, взятых с той же полки. Возможно, эти детали придется покрутить, подгоняя друг к другу, отшлифовать, выточить быстренько парочку втулок-теорем; но теория-результат не только опишет реально возникшую ситуацию, но и предскажет последствия!...

Странная штука — эта игра ума, которая всегда права...

ЧИСЛА

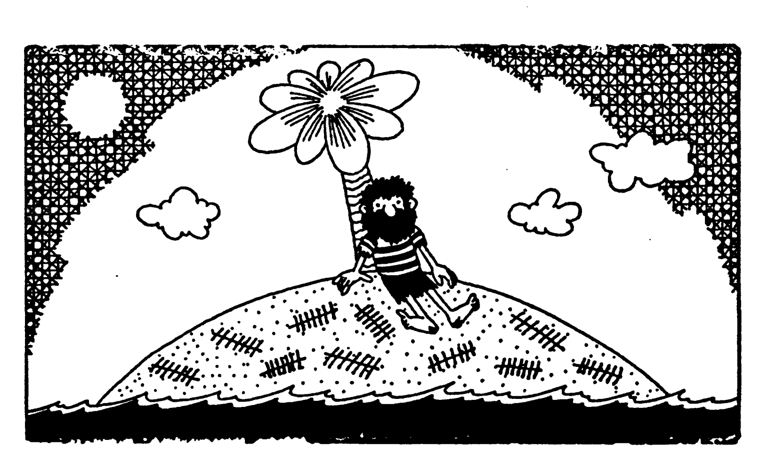


КАК МЫ СЧИТАЕМ

Искусство счета развивалось с развитием человечества. В те времена, когда человек лишь собирал в лесу плоды и охотился, ему для счета хватало четырех слов: один, два, три и много. Именно так считают и сейчас некоторые племена, живущие в джунглях Южной Америки.

Однако, когда люди начали заниматься животноводством и земледелием, то им уже стало необходимо пересчитывать коз в стаде или количество корзин с выращенными плодами (которых было больше трех), заготовленными на зиму.

Способов счета было придумано немало: делались зарубки на палке по числу предметов, завязывались узлы на веревке, складывались в кучу камешки. Но палку с зарубками с собой не возьмешь, да и камни таскать не очень приятно, а пастуху нужно

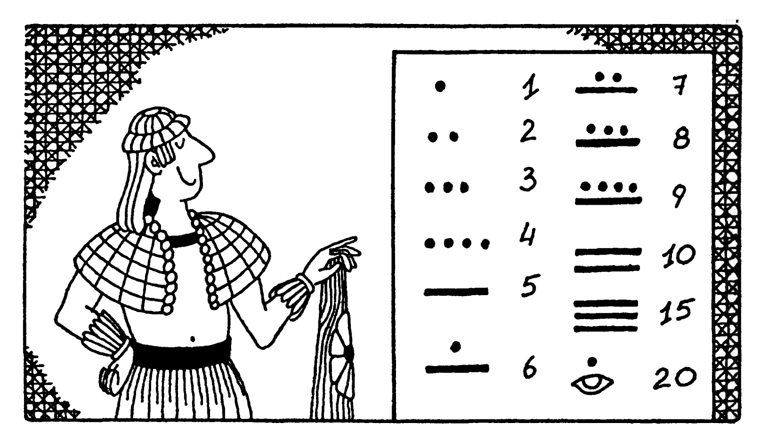


знать — не отбилась ли какая коза от стада. И тут на помощь приходят пальцы рук — отличный счетный материал, им до сих пор пользуются не только первоклассники. А если предметов больше десяти? Конечно, можно использовать и пальцы на ногах, а дальше? Тут уже ничего не оставалось делать, как придумать десятичную систему, которой мы пользуемся сейчас: считаем десятки; когда наберется десять десятков, называем их сотней; потом десять сотен — тысячей. В Древней Руси десять тысяч называли «тьма». Отсюда выражение «тьма народу».



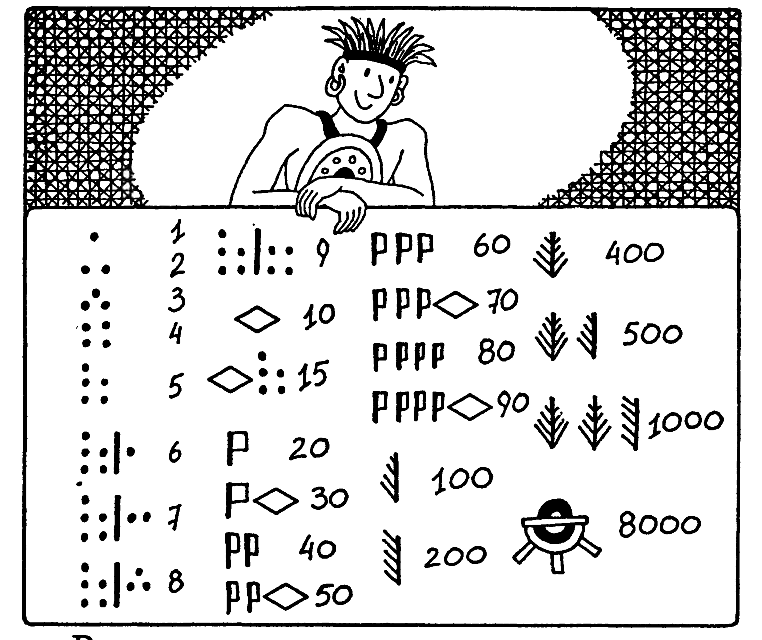
«Пальцевое» происхождение десятичной системы подтверждается формой латинских цифр: римская цифра пять (V) — ладонь с оттопыренным большим пальцем, а римская цифра десять (X) — две скрещенные руки.

Но не все народы пошли по этому пути, хотя использовали все те же пальцы. Ин-



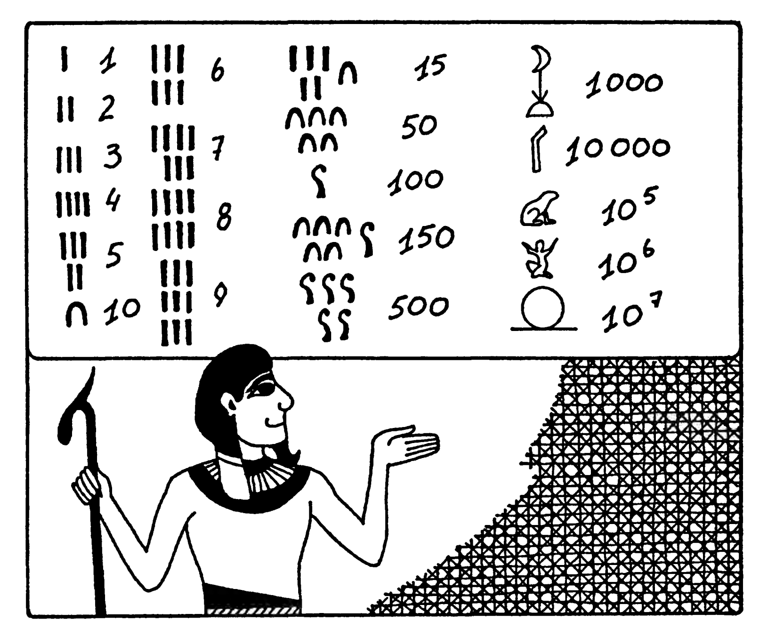
дейцы племени майя в Америке считали пятерками: одна пятерка — единица следующего разряда, пять пятерок — новый разряд и т.д. Ясно, что они пользовались пальцами только одной руки.

Некоторые племена использовали только четыре пальца одной руки, однако при этом учитывали, что каждый палец состоит из трех фаланг, т.е. имели в распоряжении двенадцать объектов счета. Так возникла **дюжина**, которая сто лет назад была широко распространена и в Европе, и в России, но постепенно уступила свое место десятке. До сих пор в Европе дюжинами считают пуговицы, носовые платки, куриные яйца и многое другое, что продается поштучно. Существует и следующий разряд в этой системе счета: двенадцать дюжин называются **гроссом** (это 144 единицы). А сколько единиц содержит следующий разряд?



Все знают, что тысяча тысяч — это миллион. Но мало кто знает, как называются следующие разряды. Для их названий приняты латинские наименования чисел. Тысяча миллионов называется **биллионом** или **миллиардом** («би» — по-латыни — два). Тысяча миллиардов, т.е. 1 000 000 000 000 — **триллион** («три» — по-латыни — три), дальше 1 000 000 000 000 000 — **квадриллион** (квадра — четыре), дальше **квинтиллион**, **секстиллион**, **септиллион**, **октиллион**, **нониллион**, **дециллион**. Каждая следующая единица содержит тысячу предыдущих.

Все числа пересчитать невозможно, поскольку за каждым числом следует на единицу большее, однако очень большие числа в обыденной жизни не нужны. Большие чис-



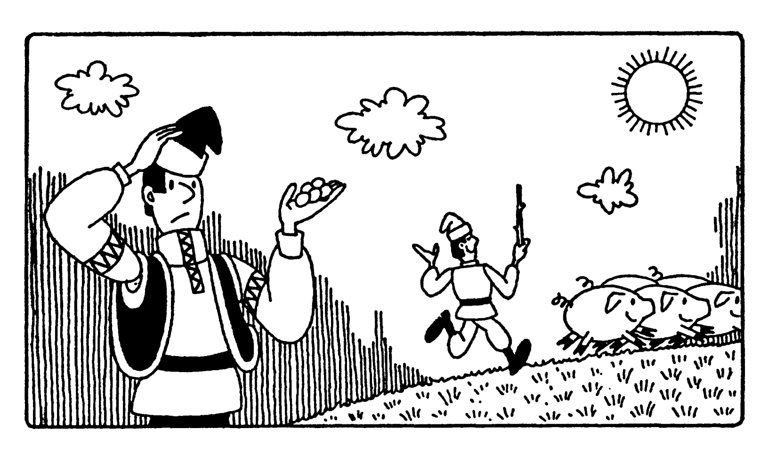
ла возникают в астрономии, часто говорят об «астрономических числах», поскольку массы звезд и расстояния между ними выражаются действительно большими числами, однако физики подсчитали, что количество атомов — мельчайших частиц вещества — во всей Вселенной не превосходит числа, выражаемого единицей со ста нулями. Это число получило специальное название — гугол.

ИСТОРИЯ ЧИСЕЛ

Мы привыкли пользоваться благами цивилизации — автомобилем, телефоном, телевизором и прочей техникой, делающей на-

шу жизнь легче и интереснее. Тысячи изобретений потребовались для этого, но самым важным из них были первые — колесо и число. Без них не было бы всего нашего технического великолепия. У этих двух изобретений есть общая черта — ни колеса, ни числа нет в природе, и то и другое — плод деятельности человеческого разума.

Казалось бы, что понятие числа должно возникнуть одновременно с умением считать, но это далеко не так. Замечено, что считать до пяти умеют и кошки и свиньи, но чтобы перейти от пяти предметов к числу «пять», требовалось великое открытие, и вот почему.



Пять собак или пять свиней — это совсем не то, что пять орехов. Ведь пять орехов — очень мало, съел — и не заметил, а пять свиней — очень много, их хватит, чтобы долго кормиться большой семье. Пять собак — это стая, которая может хорошо за-

щитить от диких зверей, а пять блох на собаке и разглядеть-то трудно. Разве можно их сравнивать?

Знаменитый русский путешественник Н.Н.Миклухо-Маклай, проведший много лет среди туземцев на островах Тихого океана, обнаружил, что у некоторых племен имеется три способа счета: для людей, для животных и для утвари, оружия и прочих неодушевленных предметов. То есть там в то время еще не появилось понятие числа, не было осознано, что три ореха, три козы и три ребенка обладают общим свойством — их количество равно трем.

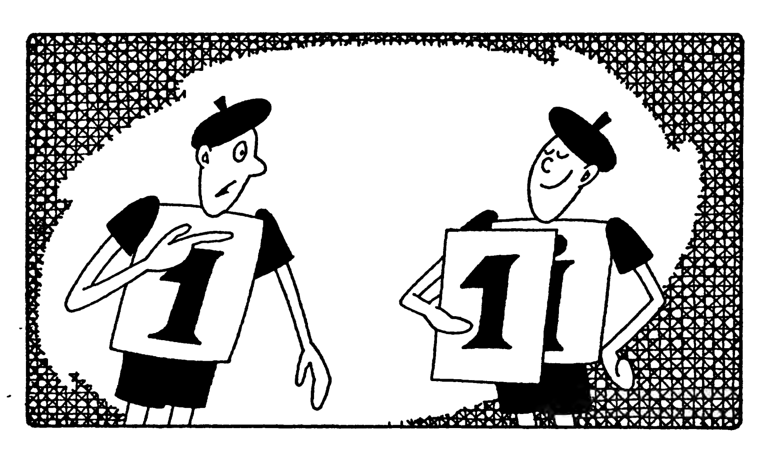
Итак, появились числа 1, 2, 3, ..., которыми можно выразить количество коров в стаде, деревьев в саду, волос на голове. Эти числа впоследствии получили название **натуральных**. Гораздо позднее появился **ноль**, которым обозначали отсутствие рассматриваемых предметов.

Однако ремесленникам и торговцам этих чисел было мало, поскольку возникали задачи деления на части земли, наследства и многого другого. Так появились дроби и правила обращения с ними.

Теперь торговцам и ремесленникам чисел было уже достаточно, но еще математики Древней Греции, ученики знаменитого Пифагора, обнаружили, что есть числа, которые не выражаются никакой дробью. Первым таким числом стала длина диагонали квадрата,

сторона которого равна единице. Это так поразило пифагорейцев, что они долгое время держали открытие в тайне. Новые числа стали называть **иррациональными** — недоступными пониманию, а целые числа и дроби — **рациональными числами**.

На этом история числа не окончилась. Математики ввели **отрицательные числа**, которые оказались очень удобными при решении многих задач. Казалось бы, уже все, но в ряде случаев возникает потребность найти число, квадрат которого равен минус единице. Среди известных чисел такого не оказалось, поэтому его обозначили буквой i и



назвали **мнимой единицей**. Числа, полученные умножением ранее известных чисел на мнимую единицу, например, $2i$ или $3i/4$, стали называть **мнимыми**, в отличие от существовавших, которые стали называть **действительными** или **вещественными**, а суммы

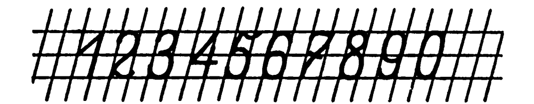
действительных и мнимых чисел, такие как $5 + 3i$, стали называть **комплексными числами.**

Сначала многие математики не признавали комплексных чисел, пока не убедились в том, что с их помощью можно решать многие технические задачи, которые до этого не поддавались решению. Так, с их помощью русский математик и механик Николай Егорович Жуковский создал теорию парения, показал, как можно рассчитывать подъемную силу, возникающую при обтекании воздухом крыла самолета.

А история числа продолжается. Математики рассматривают различные новые объекты, которые имеют свойства, сходные со свойствами обыкновенных чисел.

ДЕСЯТЬ ЦИФР

Грамотность начинается с умения писать и считать. Уже в 3—4 года, поднимаясь по лестнице, малыш уверенно считает ступеньки: «Раз, два, три, четыре, пять...» А в первом классе в тетради пишут цифры:



Эти цифры называются **арабскими**, хотя арабы лишь передали в Европу способ записи чисел, разработанный индусами. Об этом пишет один из первых математиков эпохи Возрождения Леонардо Пизанский, получивший прозвище «**Фибоначчи**» — «заика», в «Книге об абаке», написанной в 1202 году:

«Девять индусских знаков следующие: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. С помощью этих знаков и знака 0, который называется по-арабски «сифр», можно написать какое угодно число».

Любопытно, что у Фибоначчи цифры идут не в том порядке, к которому мы привыкли. Это объясняется тем, что арабы пишут не слева направо, как мы, а справа-налево.

Наверное, вы уже поняли, что слово «цифра» произошло от названия нуля у арабов. В России слово «цифра» еще долго означало **ноль**. Вот что говорится в первом российском учебнике математики Леонтия **Магницкого**, изданном в 1703 году:

«Нумерация есть счет или способ пред-

**) „Нумерація есть счисленіе еже совершенно вся числа речію именовати, яже въ десяти знаменованіяхъ, или изображенія содержатся, и изображаются сице: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, из нихже девять назнаменователны суть: последнее же 0 (еже цыфрою, или ничемъ именуетеж) егда убо (оно) едино стоитъ, тогда само о себе ничтоже значитъ"

ставлять совершенно все числа с помощью десяти знаков, которые изображаются так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Девять из них значащие, а последний же 0 (который цифрой или ничем именуется) сам по себе ничего не значит».

Обратите внимание, что буквы в старинном тексте сильно отличаются от современных, а цифры — те же, что и в ваших учебниках. Но конечно же, они не сразу стали такими. В 200 году в Индии они выглядели совершенно иначе.

Тогда не было еще нуля и привычной нам записи чисел, но со временем написание цифр совершенствовалось, причем по-разному в разных местностях Индии. Появился ноль — и возникла позиционная система записи чисел, которой мы пользуемся по сей день. Арабы выбрали из этих различных видов цифр наиболее удачные. От них цифры продолжили свой путь по Земле.

С развитием книгопечатания появилось много различных шрифтов для букв и цифр. Художники, создававшие шрифты, старались сделать буквы и цифры красивыми и

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

достаточно сильно отличающимися друг от друга, чтобы их не путать при чтении. Вот один из таких шрифтов:



Заметьте, что здесь у четных цифр «хвостики» идут вверх, а у нечетных — вниз. Здесь уже труднее спутать цифры 2 и 5. Но такое написание мало кому встречалось, а вот такое видел каждый на электронных часах и калькуляторах. С помощью набора семи отрезков удается изобразить каждую из десяти цифр.

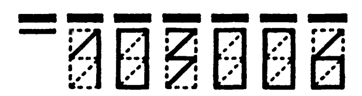
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Еще одно изображение цифр, связанное

с потребностями техники, мы можем найти на обороте каждого почтового конверта:



Здесь в написании участвуют уже десять отрезков. Эти цифры предназначены для электронной машины, сортирующей корреспонденцию. Жирные черточки над индексом на конверте нужны для того, чтобы машина смогла точно настроиться на написанный нами индекс.



Вы, вероятно, обращали внимание на полосатые прямоугольники, встречающиеся на импортных и некоторых наших товарах:

Что означают эти полоски? Оказывается, с их помощью записано расположенное внизу число, а эта запись легко прочитывается компьютером.

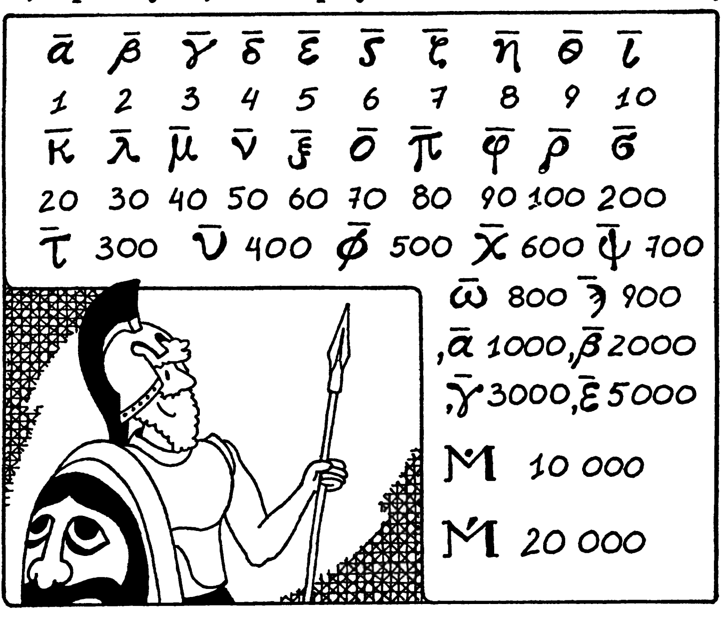
РИМСКИЕ, АРАБСКИЕ И ДРУГИЕ

Арабы принесли к нам способ записи чисел, которым мы сейчас пользуемся, из Индии. Однако в самой Индии до последнего

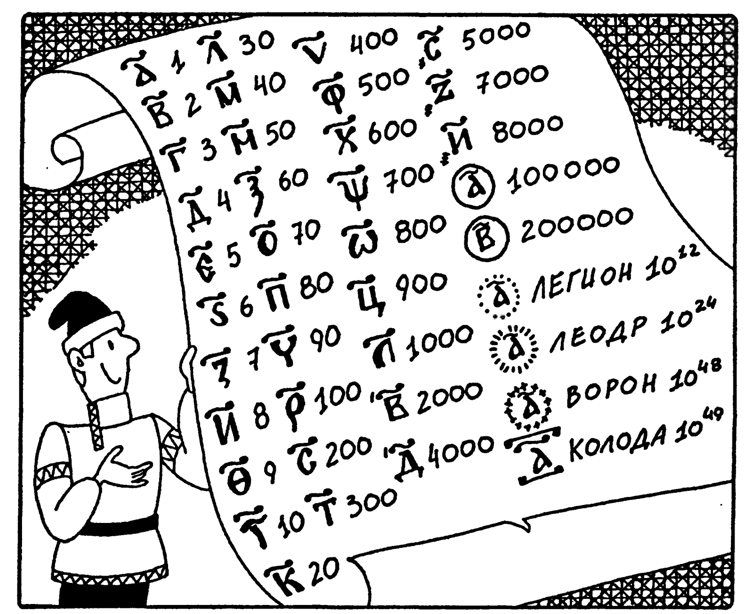
времени цифры выглядели совсем не так, как в Европе.

А цифры, которыми сейчас пользуются арабы, тоже не очень похожи на европейские.

В Древней Греции поступили очень просто: греки не стали выдумывать специальные значки для цифр, а использовали буквы. Единицу обозначали буквой А, двойку. — В, тройку Г, четверку — Δ. Вы заметили,



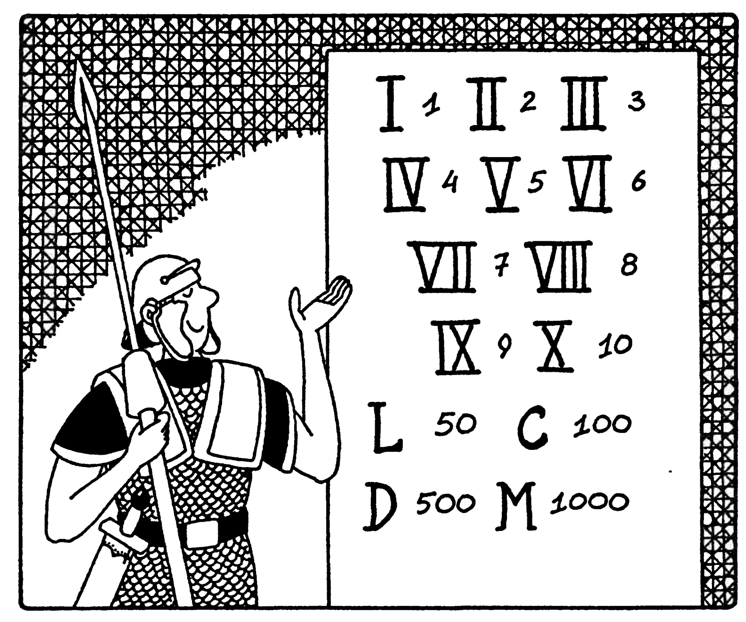
что греческий алфавит похож на русский — в этом нет ничего удивительного, так как славянский алфавит был создан на основе греческого монахами Кириллом и Мефодием, приверженцами «греческой», т.е. православной веры. Чтобы не путать числа с бук-



вами, над ними ставили черточку. Вместе с алфавитом эта система записи чисел пришла в Древнюю Русь. Правда, вместо черточки на Руси ставили волнистую линию — **титло.**

Древнегреческие цифры остались лишь в истории, а древнеримскими цифрами мы продолжаем пользоваться. Записи «XX век», «Глава IV» не ставят нас в затруднительное положение. Почему мы до сих пор пользуемся этой очень неудобной системой записи чисел? Наверное, потому, что с ее помощью можно отличить при письме одни числа от других. Так, запись 25.XI.90 сразу говорит о том, что это — дата: 25 ноября 1990 года.

Познакомимся поближе с **римскими цифрами:**



I — один
V — пять
X — десять
L — пятьдесят
C — сто
D — пятьсот
M — тысяча

Увидев на фронтоне старого особняка запись MDCCLXXXIX, вы узнаете, что этот дом был построен в 1789 году. Существует и другой способ записи чисел римскими цифрами, при котором меньшая цифра не ставится перед большей, поэтому там число 4 записывается, как IIII, число 9 как VIIII, а 99 как LXXXXVIIII.

Но как быть с очень большими числами в десятки и сотни тысяч? Например, как

записать число 275 748? Римляне поступали очень просто, они записывали его так:

CCLXXV$_m$DCCXLVIII

Буковка m показывает, что число, стоящее впереди нее, выражает количество тысяч в данном числе.

Не только у арабов свои собственные, отличающиеся от общепринятых, цифры. Как вы знаете, в Китае слова записывают иероглифами, ими же записывают и числа, причем система записи близка к римской и греческой.

Если арабы пишут справа налево, то китайцы вплоть до недавнего времени писали сверху вниз. Числа 20, 30, 40, ... записывались столбиком из трех символов.

Нижний символ означал, что речь идет о десятках, а верхний указывал, сколько их. Такие числа, как, например, 47, записываются столбиком из трех символов: к числу 40 снизу добавляется иероглиф цифры 7.

Аналогичная система используется для записи сотен, тысяч и т.д.

В начале XX века в Китае перешли на запись текстов слева направо.

Иероглифы используют для записи чисел не только в Китае, но и в Японии, Корее, Камбодже, однако и там все более широко применяется «международная» система записи чисел. Так, на марках этих стран иероглифы, выражающие стоимость марки, дополняются записью этих чисел привычными нам цифрами.

ОДИН, ДВА, МНОГО

Наверное, вы слышали о некоторых племенах Африки и Южной Америки, счет в которых ведется так: один, два, много. Но существует еще одно племя, разбросанное по всему миру, представители которого считают таким же способом, — это ученые, — в частности, математики. Не верите? Откройте энциклопедический словарь и посмотрите слова, начинающиеся на «моно», «ди», «поли», а также на «уни», «би», «мульти». Первые три — один, два, много — по гречески, а вторые — то же самое по-латыни. Вот некоторые из таких слов.

Сначала греческие один, два, много.

Монотонная функция — функция, которая либо всюду возрастает, либо всюду убывает. Монотонные функции имеют много интересных свойств, например, любая «хорошая» функция является суммой двух монотонных функций.

Монография — книга, посвященная рассмотрению одного вопроса. Например, если книга называется «Монотонные функции», то это наверняка монография. Авторов у нее может быть и много.

Дихотомия — деление пополам, часто — многократное деление пополам. Вот решение классической задачи-шутки: как поймать льва в пустыне? Надо разделить пустыню пополам и отбросить ту ее часть, в которой

льва заведомо нет. Оставшуюся половину надо снова разделить пополам и снова отбросить ту часть, в которой льва нет. И так далее. В конце концов лев будет пойман.

Дилемма — необходимость выбора из двух возможностей (см. задачу о поимке льва).

Полиэдр — многогранник. Этим словом математики пользуются в том случае, если рассматриваются не только трехмерные многогранники, но и многогранники произвольной размерности.

Полином — сумма одночленов (т.е. мономов). Например, $x^3 + 9x^2 + 9x + 4$ — многочлен от одной переменной, $x^3 + 9x^2y + xy^2 + 7y^3$ — многочлен от двух переменных. Многие многочлены особенно знамениты и носят специальные названия: полиномы Чебышева, полиномы Лежандра и др.

Теперь латинские один, два, много.

Уникурсальная кривая — кривая, которую можно нарисовать на плоскости, не отрывая карандаша от бумаги. О ней мы подробно рассказываем в этой книге.

Униформный — всюду одинаковый (буквально — единообразный).

Биквадратное уравнение — квадратное уравнение, относительно квадрата неизвестного, например, $x^4 + 3x^2 - 1 = 0$.

Биссектриса — прямая, делящая угол на две равные части.

Бином Ньютона — выражение вида

$(a + b)^n$. Коэффициенты в разложении бинома по степеням a и b называются биномиальными коэффициентами.

Мультипликативный — имеющий отношение к умножению. Так, мультипликативной теорией чисел называется часть теории чисел, рассматривающая свойства натуральных чисел, связанные с их разложением на простые множители. Свойства чисел, связанные с их разложениями на слагаемые, изучает аддитивная теория чисел.

Мультииндекс — совокупность нескольких написанных подряд индексов, например, ik в записи a_{ik}.

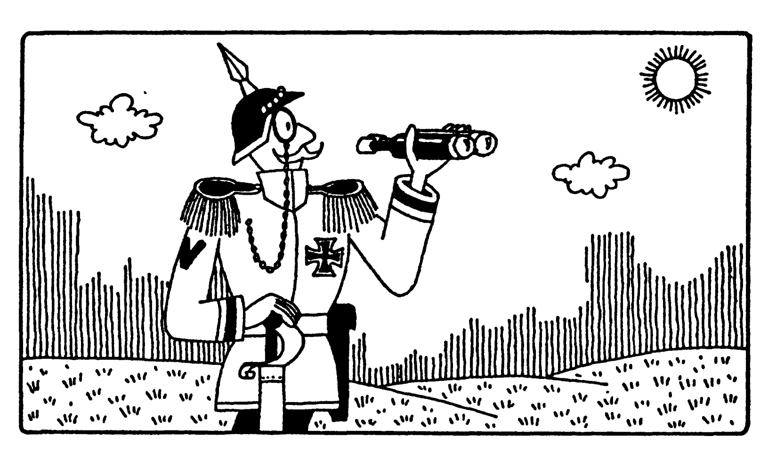
Подобные слова встречаются и в физике (биполь, диод, поликристаллы), и в химии (диметилфтолат, бикарбонат), и в медицине (поливитамины) и в других науках, и просто в быту (бинокль, монокль, уникум). Слова, начинающиеся с «три», «тетра», «пента»,... или с «терци», «кварта», «квинта»,... т.е. с три, четыре, пять, ... по-гречески или по-латыни, тоже есть, но употребляются они гораздо реже (триграмма, тетраэдр, квартика). Можно сказать, что ученые тоже называют окружающие их предметы и явления по принципу: один, два, много.

Вы, наверное, заметили, что греческие и латинские слова используются довольно произвольно. Монокль и бинокль — первое от греческого «моно», а второе от латинского «би», бином и полином — первое от латин-

ского «би», а второе — от греческого «поли». Приживалась, видимо, та приставка, с которой слово получалось благозвучнее.

Не следует путать приставку «ди» с приставками «диа» (через): диафрагма, диаметр, диагональ и «дис», «диз» (не) : дискретный, дизъюнкция.

В заключение заметим, что для наших с



вами предков «много» означало количество, большее четырех. Это становится ясным, когда вы вслушаетесь в счет: две книги, три книги, четыре книги, а дальше уже пять книг, шесть книг, миллион книг!

НОЛЬ

В этой книге много раз упоминаются достижения математиков Древней Греции. Они поистине великолепны и вызывают невольное восхищение.

Но одного открытия древние греки не сделали. Они не придумали ноля.

Нам легко с высоты многовекового опыта человечества пожимать плечами: подумаешь, ноль! Что же это греки, а за ними и римляне, так оплошали? До такой простой вещи не додумались!

А это было совсем не просто. Что такое «ничего»? Пустое место! Если ничего нет, кому придет в голову что-то писать, когда можно не писать ничего!

Кто первым догадался обозначить цифрой «ничто»? Мы никогда не узнаем. Можем только утверждать, что таких гениев было



несколько. Кто-то придумал знак для нуля в Древнем Вавилоне. Кто-то из индейцев майя — в Америке. Кто-то — в Китае. И кто-то из мудрецов Индостана обозначил пустое место тем самым кружком, которым весь мир пользуется до сих пор.

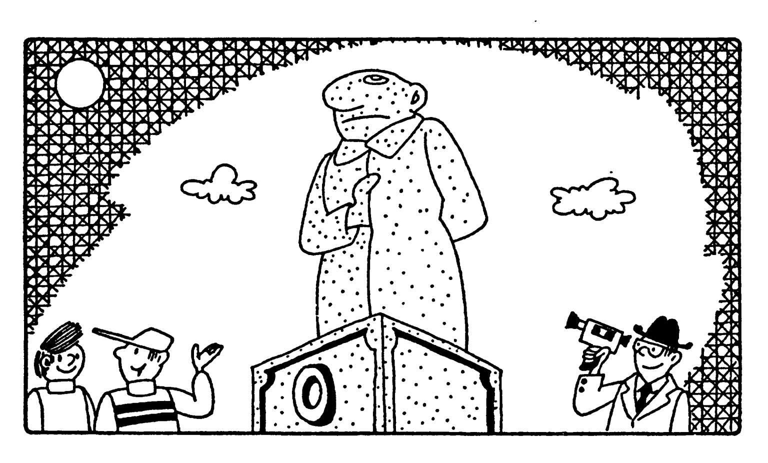
Итак, началась славная жизнь ноля — цифры и числа.

Ноль-цифра дал возможность не выдумывать новых знаков для больших чисел. Теперь любое число можно было записать, используя одни и те же цифры, и уже не спутаешь 12 со 120 или 102 — если в каком-то числе есть сотни и единицы, но нет десятков, в отведенном для десятков месте достаточно написать, что их — ноль. Появилась позиционная система счисления, в которой значение цифры зависит от ее места в числе — позиции. А пользоваться ею куда удобнее...

Ноль-число и сам по себе весьма примечателен. К какому числу его ни прибавь, оно не изменится (ведь мы прибавили «ничего»). На какое число его ни умножь, будет снова ноль (мы взяли число ноль раз, т.е. ни разу). Сам он делится на любое число (пустое место как ни дели — все равно ничего не будет). Зато делить на него самого нельзя: разве можно что-то разделить на ноль частей? Если бы это удалось, как из нуля частей сложить вновь то, что мы разделили? Чтобы избежать этой неприятности, деление на ноль пришлось запретить.

Ноль — удобное обозначение начала пути. Если вы едете по шоссе, мимо вас мелькают километровые столбы: 10 км, 11 км, 12 км... от чего? От главного почтамта того города, откуда вы выехали. Расстояние от почтамта до него самого же равно нулю — ни идти, ни ехать не надо... По железным дорогам России все расстояния считают от Москвы (кроме Октябрьской железной дороги, где отсчет идет от Санкт-Петербурга). Так что Москва — это ноль на карте железных дорог, точка, из которой все начинается.

А точка, от которой отсчитывают расстояния в Венгрии, отмечена особо. В этом месте (оно находится в центре Будапешта) поставлен — ни много ни мало — памятник нулю. Ни одна другая цифра не удостоилась таких почестей!



Ноль — и начало всех времен... Только где это начало? Может быть это момент возникновения Вселенной? Но если такой момент и был, то очень давно, и точно сказать, сколько лет прошло с тех пор, никто не сможет — разве что примерно, с точностью до миллиардов лет. А считать годы нужно. Но раз неизвестно, когда состоялось «сотворение мира», почему не поступить так же, как и с расстояниями? Выберем какое-нибудь знаменательное событие, скажем, что оно произошло в нулевой момент времени, и от него пойдет первый год. Так мы и делаем: говорим, что первый год нашей эры начался с Рождества Христова, а все, что было до того — было до нашей эры.

Между прочим, если бы мы считали годы только слева направо (ведь на самом деле до Рождества Христова мы считаем справа налево: первый, второй,..., сотый — все дальше от нуля), «нулевым» оказался бы последний год до нашей эры — от «минус первого» года до нуля. Так что круглым числом 0 заканчивается предыдущий век (до н.э.), а не начинается новый. И 2000 год, который не за горами, — это последний год XX века, а вовсе не первый год третьего тысячелетия. Но круглые числа так красивы, что убедить человечество отложить на год торжества по поводу наступления XXI века, видимо, не удастся.

Впрочем, так ли это важно?...

ПРО УМНОЖЕНИЕ

Что остается у большинства людей в голове из того, что они когда-то изучали в школе? Конечно, у разных людей — разное, но у всех, наверняка, таблица умножения. Помимо усилий, приложенных для ее «задалбливания» вспомним сотни (если не тысячи) задач, решенных нами с ее помощью. Триста лет назад в Англии человек, знающий таблицу умножения, уже считался ученым человеком.

Способов умножения было придумано много. Итальянский математик конца XV — начала XVI века Лука Пачиоли в трактате об арифметике приводит 8 различных способов умножения. В первом, который носит название «маленький замок», цифры верхнего числа, начиная со старшей, поочередно умножаются на нижнее число и записываются в столбик с добавлением нужного числа нулей. Затем результаты складываются (см. рис.1). Преимущество этого метода перед обычным состоит в том, что уже с самого начала определяются цифры старших разрядов, а это бывает



Пачиоли Л.

важно при прикидочных расчетах.

Второй способ носит не менее романтическое название «ревность» (или решетчатое умножение). Рисуется решетка (рис. 2), в которую затем вписывают результаты промежуточных вычислений, точнее, числа из таблицы умножения. Решетка является прямоугольником, разделенным на квадратные клетки, которые, в свою очередь, разделены пополам диагоналями. Слева (сверху вниз) писался первый множитель, а наверху — второй. На пересечении соответствующей строки и столбца писалось произведение стоящих в них цифр. Затем полученные числа складывались вдоль проведенных диагоналей, а результат записывался в конце такого столбика. Результат прочитывался вдоль

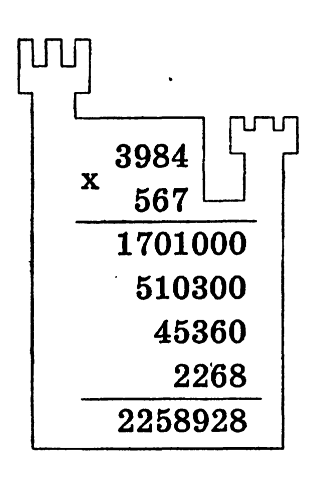


Рис. 1

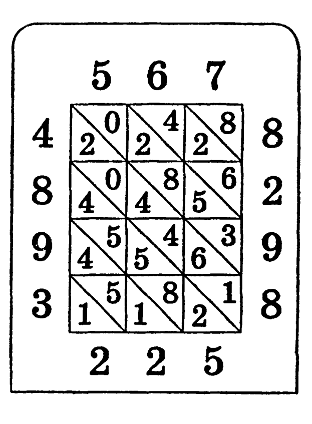


Рис. 2

нижней и правой сторон прямоугольника. «Такая решетка, — пишет Лука Пачиоли, — напоминает решетчатые ставни-жалюзи, которые вешались на венецианские окна, мешая прохожим видеть сидящих у окон дам и монахинь».

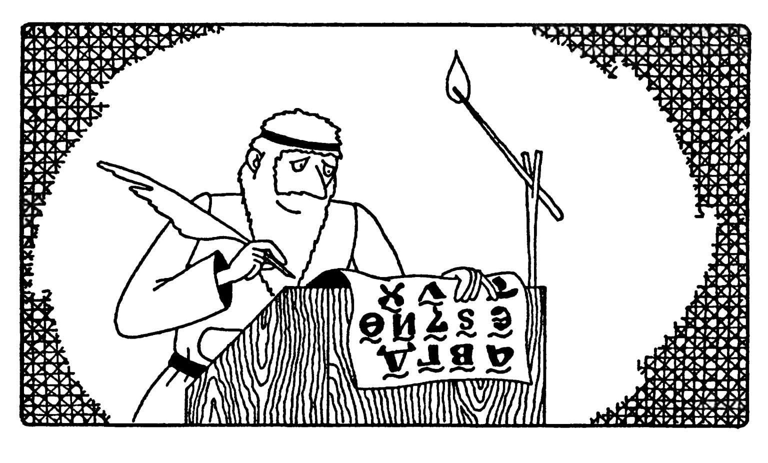
Все способы умножения, описанные в книге Луки Пачиоли, использовали таблицу умножения. Однако русские крестьяне умели умножать и без таблицы. Их способ умножения использовал лишь умножение и деление на 2. Чтобы перемножить два числа, их записывали рядом (рис. 3), а затем левое число делили на 2, а правое умножали на 2. Если при делении получался остаток, то его отбрасывали. Затем вычеркивались те строчки в левой колонке, в которых стоят четные числа. Оставшиеся числа в правой колонке складывались. В результате получалось произведение первоначальных чисел. Проверьте на нескольких парах чисел, что это действительно так. Доказательство справедливости этого метода показывается с помощью двоичной системы счисления.

567	3984
283	7968
141	15936
~~70~~	~~31872~~
35	63744
17	127488
~~8~~	~~254976~~
~~4~~	~~509952~~
~~2~~	~~1019904~~
1	2039808
	2258928

Рис. 3

МАТЕМАТИКА ДОПЕТРОВСКОЙ РУСИ

Древнейшая русская математическая рукопись, сохранившаяся до наших дней, датируется 1136 годом — временем, когда единая Киевская Русь стала неудержимо разваливаться на мелкие, враждующие княжества. Автором этой рукописи был новгородский дьякон и «числолюбец» по имени Кирик.

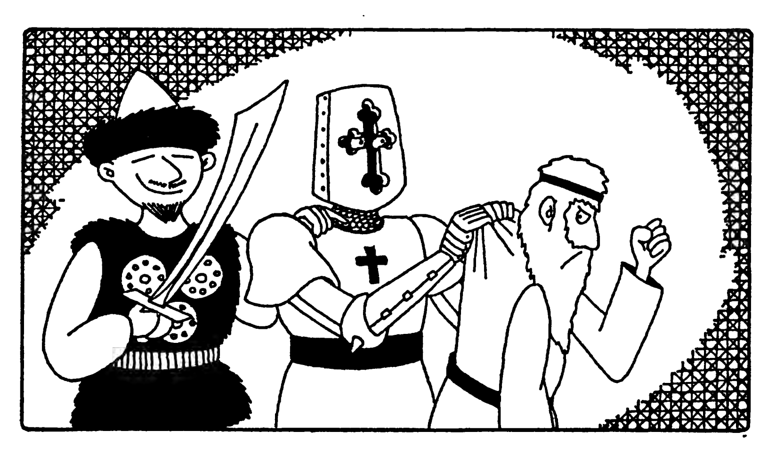


Благодаря запискам Кирика, мы можем судить, что уровень математических знаний в XII веке был на Руси не ниже, чем в Западной Европе. Записки содержат значки на суммирование прогрессий, связанные с приплодом коров и овец, исчисление количества месяцев, недель и дней, прошедших со дня сотворения мира; вычисление размеров Солнца и Луны по астрономическим данным

(при этом число π считается равным $3\frac{1}{8}$).

А самой сложной задачей было вычисление дат празднования Пасхи.

По православным канонам этот праздник приходится на первое воскресенье после первого весеннего полнолуния. Таковым считается полнолуние, наступившее между 21 марта и 18 апреля (по старому стилю). Последовательность дат зацикливается только через 532 года. Чтобы вычислить даты Пасхи на много лет вперед, надо сопоставить периодичность солнечных и лунных движений, обладать основательными знаниями и навыками в астрономии и математике.



Монголо-татарское и ливонское нашествие надолго прервали развитие математики на Руси. Торговый путь из варяг в греки перестал существовать, с ним прекратился и обмен информацией. Новые способы счета

могли быть получены разве что от татарских сборщиков дани.

В конце XV века татарское иго было свергнуто. На Руси, хотя и с отставанием, развивалась торговля, строительство, оружейное дело. В XVI—XVII веках появились многочисленные руководства, которые содержали необходимые для практических нужд математические сведения. Однако, Россия, лишенная выходов к морям, не имела того мощнейшего стимула развития математики, каким в странах Западной Европы стало мореплавание. Математическое отставание России усугублялось вплоть до начала XVIII века — до реформ Петра Великого.

ПРО ДЕЛЕНИЕ

Хотя умножение в давние времена считалось трудной задачей, но куда более трудным было деление, и делить числа люди научились гораздо позже, чем их умножать. У древних даже не было понятия «частное». Конечно же, жизнь заставила людей придумать процедуры, или, как принято говорить теперь, алгоритмы для деления одного числа на другое. Без этого не могли вести свои расчеты купцы и ремесленники.

В X веке математик Герберт, который затем стал папой Сильвестром II, в своих сочинениях привел правила деления. При со-

здании этих правил Герберт придерживался следующих принципов:

1) ограниченное употребление таблицы умножения, в частности, не использовать умножение в уме двузначного числа на однозначное;

2) избегать вычитаний, а заменять их сложениями;

3) работа должна выполняться чисто автоматически, без помощи испытаний.

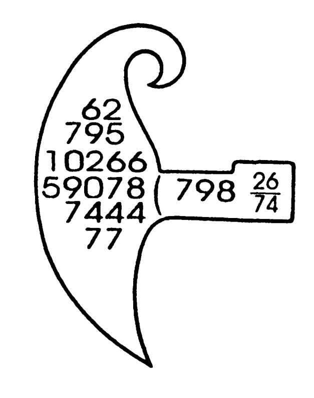
Почему такие строгие ограничения? Да потому, что правила были рассчитаны на монахов, а те в детстве не ходили в школу и поэтому не знали наизусть таблицы умножения. Алгоритм Герберта был приспособлен для счета на абаке — близком родственнике наших счетов.

Правила Герберта были настолько сложными, что не были понятны даже самым прилежным счетчикам-абацистам. Когда в Европе появился арабский способ деления, которым мы пользуемся до сих пор, то он получил название «золотого деления», а способ Герберта стали называть «железным делением».

Наряду с этими способами деления существовали и другие. Например, раскладывали делитель на простые множители, а затем последовательно делили делимое на эти числа. При этом для деления на однозначные числа существовал специальный способ.

Долгое время в Европе конкурировали

два способа деления: «посредством придачи», которым мы пользуемся сейчас, и «метод зачеркиваний» или «галера». Название «метод придачи» возникло из-за придачи или сноса вниз одной из цифр делимого перед очередным действием. Этот способ также назывался «долгое деление».



Второй способ итальянцы называли «галера» из-за того, что после окончания вычислений цифры располагаются в виде фигуры, напоминающей это судно. Лука Пачиоли считал этот способ самым быстрым, подобно тому, как галера — быстрейшее из судов. А англичане называли его «метод зачеркиваний», поскольку здесь постоянно производится зачеркивание цифр. Долгое время этот способ предпочитался всем другим, в частности тому, которым мы пользуемся сейчас. Опишем его, может быть кто-то из читателей предпочтет пользоваться именно им.

Описание проведем на примере деления числа 59078 на 74. Последовательность действий изображена на рисунке.

Деление выполнялось следующим обра-

59078(
74
a)

10
59078(7
74
b)

7
102
59078(7
744
c)

6
79
1021
59078(79
744
7
d)

62
795
10216
59078(798 $\frac{26}{74}$
7444
77
e)

зом. Сначала записывали делимое, под ним писали делитель, справа от делимого ставили скобку, за которой последовательно записывались цифры частного (рис. *a*). Первая цифра частного — 7. Записываем ее. Поскольку $7 \cdot 7 = 49$ и $59 - 49 = 10$, то записываем сверху 10. Теперь зачеркнем 59 в делимом и 7 в делителе. Так как $7 \cdot 4 = 28$, а 4 находится под нулем, то 28 нужно вычесть из 100. В остатке получаем 72. Зачеркнем теперь 10 над делимым и 0 в делимом, а в делителе зачеркнем 4 (рис. *b*). Теперь сверху напишем 72, а внизу снова 74, сдвинув его на одно место вправо, как показано на рис. с. Следующая цифра частного — 9, так как 7 содержится в 72 девять раз: $7 \cdot 9 = 63$. Поскольку $72 - 63 = 9$, то зачеркнем 72 вверху и 7 внизу, запишем 9 вверху и 9 в частном.

Теперь, так как 4 · 9 = 36 и 97 − 36 = = 61, то зачеркнем в делимом 7 и напишем над ним 1, после этого зачеркиваем внизу 7 и 4. Получаем то, что изображено на рис. *d*. Снова передвинем делитель на одно место вправо. В оставшемся числе 61 число 7 содержится 8 раз, поэтому пишем в частном 8. Теперь находим, что 7 · 8 = 56 и 61− −56 = 5, поэтому зачеркиваем 61 вверху и пишем 5 над 1. А так как 8 · 4 = 32 и 58 − 32 = 26, то зачеркнем вверху цифру 5 и надпишем над ней цифру 2, зачеркнем цифру 8 в делимом и над ним надпишем цифру 6.

Если теперь посмотреть на незачеркнутые цифры вверху, то (учитывая их порядок) получаем число 26 — остаток от деления. Окончательная картина изображена на рис. *e*. Если ее повернуть на 90°, то она будет напоминать галеру.

Этот способ пришел из Индии. Индусы при счете не пользовались бумагой, а писали палочкой на дощечке, покрытой пылью. Вместо зачеркиваний они просто сглаживали пыль на месте цифры. Поэтому в результате деления 59078 на 74 на дощечке оказывалась запись:

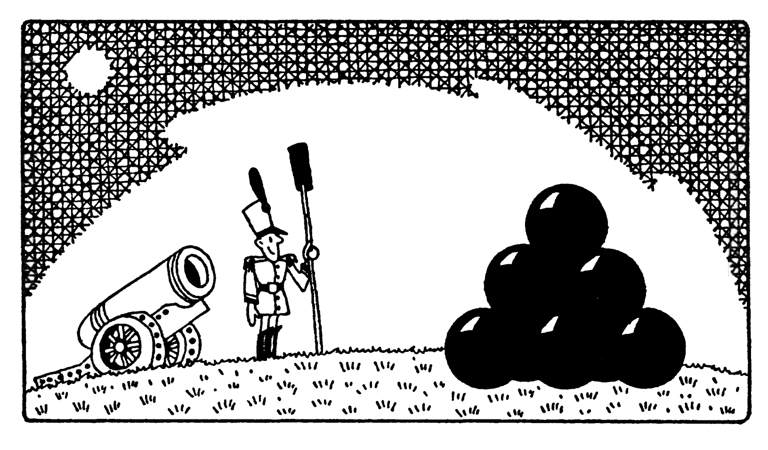
26
59078 798
74

Немало изобретательности понадобилось людям, чтобы научиться быстро делить чис-

ла, а школьникам нужно изрядно потрудиться, чтобы освоить эти методы. Но, может быть, через десяток-другой лет отпадет необходимость в выучивании этих правил из-за всеобщей «калькуляторизации» и «компьютеризации».

ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА

Давным-давно, помогая себе при счете камушками, люди обращали внимание на правильные фигуры, которые можно выложить из камушков. Можно просто класть камушки в ряд: один, два, три... Если класть их

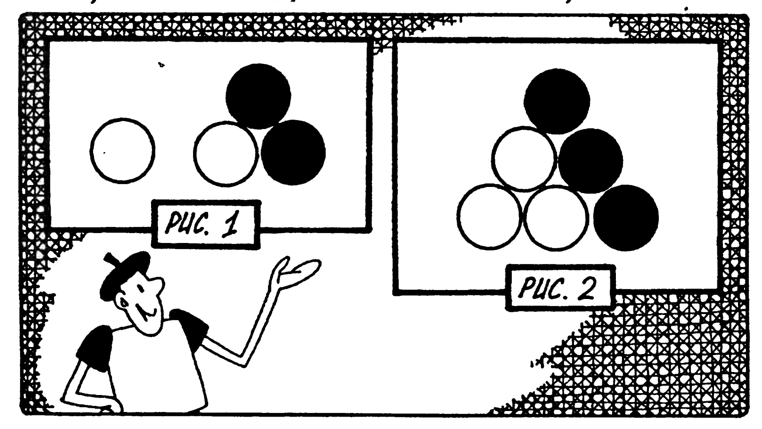


в два ряда, чтобы получались прямоугольники, мы обнаружим, что получаются все четные числа. Можно выкладывать камни в три ряда: получатся числа, делящиеся на три. Всякое число, которое на что-нибудь

делится, можно представить таким прямоугольником, и только простые числа не могут быть «прямоугольными».

А что, если складывать треугольник? Треугольник получается из трех камушков: два в нижнем ряду, один — в верхнем, в ложбинке, образованной двумя нижними камнями. Если добавить камень в нижний ряд, появится еще одна ложбинка; заполнив ее, мы получим ложбинку, образованную двумя камушками второго ряда; положив в нее камень, мы наконец получим треугольник. Итак, нам пришлось добавить три камушка (рис.1). Следующий треугольник получится, если добавить четыре камня (рис.2). Выходит, что на каждом шаге мы добавляем столько камней, сколько их становится в нижнем ряду. Если теперь считать, что один камень — это тоже треугольник, самый маленький, у нас получится такая последовательность чисел:

$1,\ 1 + 2 = 3,\ 1 + 2 + 3 = 6,$



1+2+3+4 = 10, 1+2+3+4+5 = 15 и т.д.

Числа 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36... называются «треугольными». Таково количество бильярдных шаров, которые в начале игры выкладывают треугольником на столе (их пятнадцать). Эти числа получаются, если складывать, скажем, бревна или трубы, чтобы они не раскатывались: наибольшее возможное количество бревен в таком штабеле — треугольное число.

Весьма примечательны **квадратные** числа, т.е. такие, которые получаются при выкладывании из камушков квадратов. Вот они какие: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,...

Посмотрите на выложенные квадратики (рис.3). Первый из них — это один ряд из одного камушка: 1. Второй — это два ряда, каждый из двух камушков: 2·2=4. Третий — три ряда по три камушка: 3·3 = 9. Четвертый — 4 ряда по 4 камня: 4·4 = 16. Неспроста про числа 2·2, 3·3, 4·4 говорят: «два в квадрате», «три в квадрате», «четыре в квадрате»!

Повозимся немного с этими картинками. Посмотрим, прежде всего, на сколько камней отличаются соседние квадраты. Чтобы из квадрата 3·3 сделать квадрат 4·4, нужно добавить три камушка снизу, еще 3 сбоку и один в уголке: 4·4 = 3·3 + 3 + 3 + 1 = =3·3 + 3 + 4. Чтобы из квадрата 4·4 получился квадрат 5·5, нужно положить два раза по 4 камушка — снизу и сбоку — и

опять еще один, в уголке: $5 \cdot 5 = 4 \cdot 4 + 4 + 4 + 1 = 4 \cdot 4 + 4 + 5$. Итак, если мы знаем, что 10 в квадрате — это 100, то мы

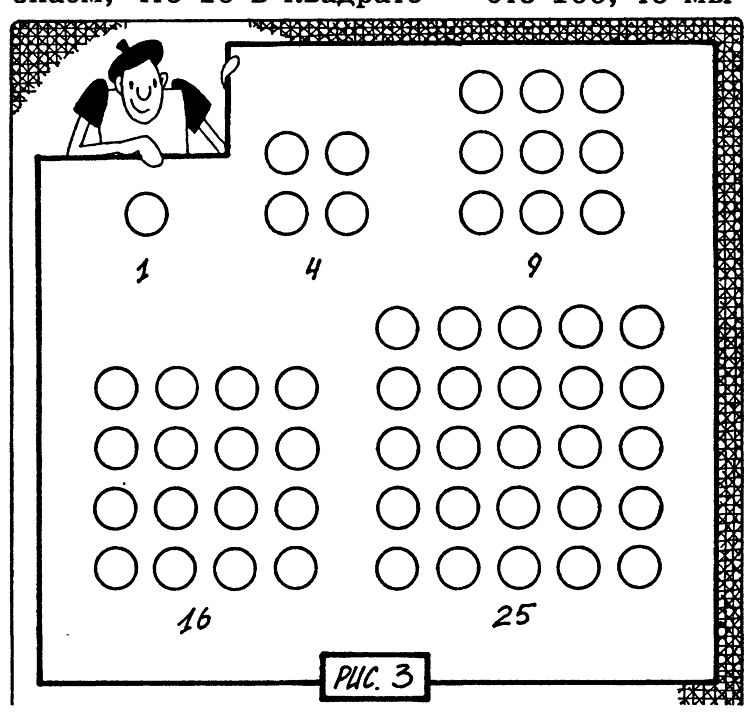
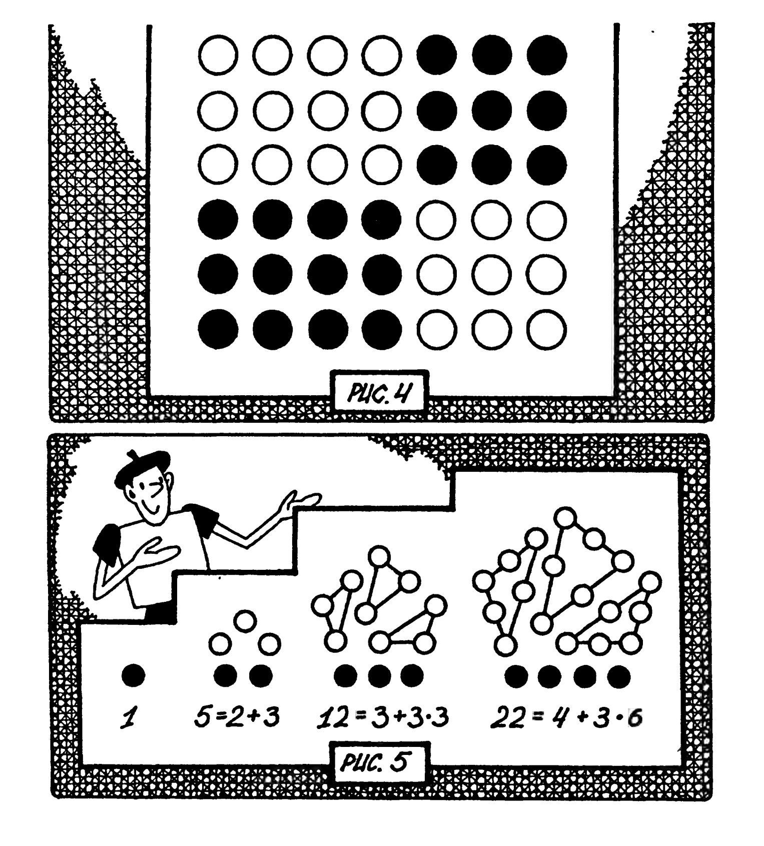


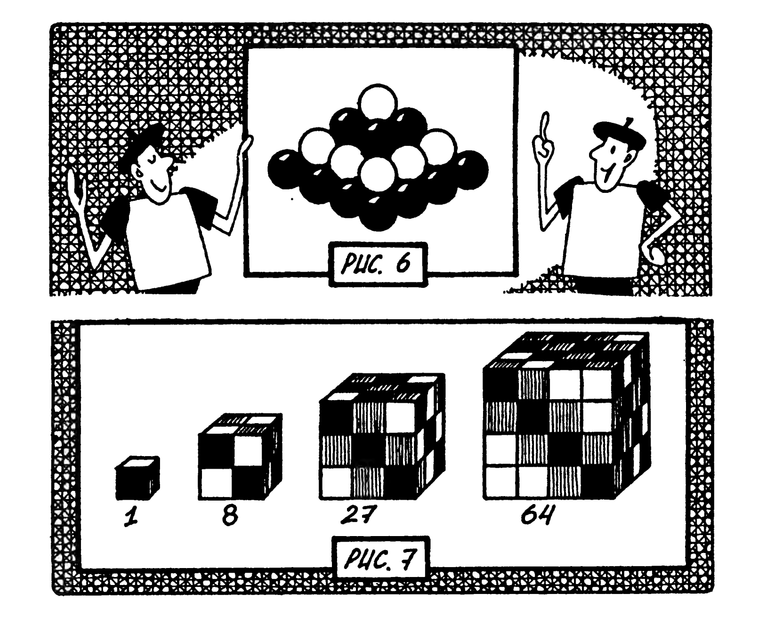
РИС. 3

легко найдем, чему равно 11 в квадрате: $11 \cdot 11 = 10 \cdot 10 + 10 + 11 = 100 + 10 + 11 = 121$.

Глядя на картинку, легко сообразить, чему равен квадрат суммы двух чисел. Например, чтобы найти $(3+4) \cdot (3+4)$, нужно приложить уголком друг к другу квадраты $4 \cdot 4$ и $3 \cdot 3$ и добавить два прямоугольника $3 \cdot 4$ и $4 \cdot 3$ (рис.4): $(3+4) \cdot (3+4) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 16 + 9 + 12 + 12 = 25 + 24 = 49$.



Попробуем пойти дальше и поскладывать пятиугольники. Первым считаем, как и раньше, пятиугольник из одного камушка, во втором 5 камней, в третьем — 12, в четвертом — 22... Посмотрите внимательно на рис. 5. Во втором пятиугольнике два камня снизу и еще три раза по одному; в третьем — 3 камня снизу и еще три треугольника —



три вторых по счету треугольных числа. А в четвертом? 4 камня снизу и три третьих по счету треугольных числа: 4 + 3·6 = 22. По этому правилу, не рисуя картинку, можно найти и пятое пятиугольное число: 5 камней будут снизу, и еще три четвертых по счету треугольных числа, т.е. 5 + 3·10 = 35.

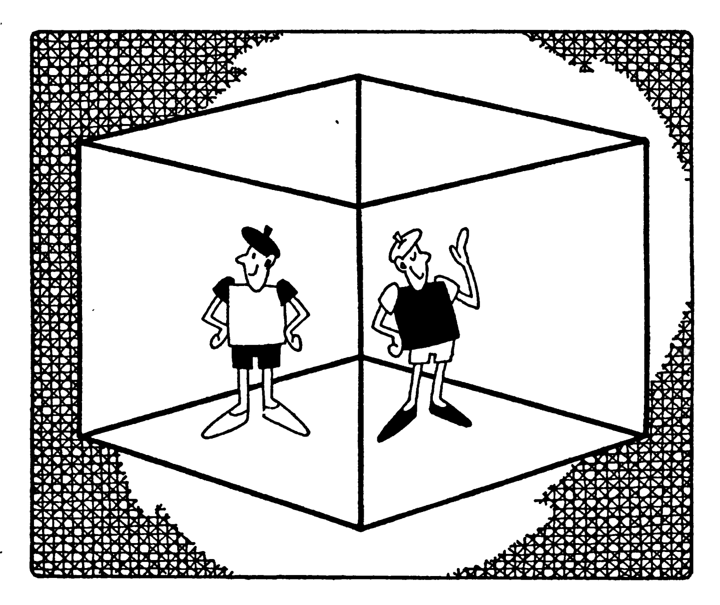
Можно рассматривать и шестиугольные, и семиугольные числа, и вообще, числа, возникающие при складывании разнообразных многоугольников, с разными сторонами или с одинаковыми. Каковы они? Проэкспериментируйте, раскладывая по столу монетки или пуговицы. Обратите внимание: все эти числа выражаются через треугольные! Мож-

но изучать и числа пирамидальные, возникающие при складывании круглых камушков или, скажем, пушечных ядер горкой так, чтобы они не раскатывались. И что же? Каждый слой ядер в такой пирамиде — треугольное число! Наверху — одно ядро, под ним — три, под теми — шесть и так далее (рис.6): 1, 1+3=4, 1+3+6=10, 1+3+6+10 = = 20,... Очень интересны кубические числа, возникающие при складывании кубиков: 1, 2·2·2 = 8 (два этажа из квадратов 2·2), 3·3·3 = 27 (три этажа из квадратов 3·3), 4·4·4 = 64 (четыре этажа из квадратов 4·4), 5·5·5 = 125, 6·6·6 = 216, 7·7·7 = 343, 8·8·8 = 512, 9·9·9 = 729, 10·10·10 = 1000 и так далее (рис.7). Теперь понятно, почему про такие числа говорят: «два в кубе», «три в кубе», «десять в кубе»?

Счет на камушках оставил глубокий след в истории математики. Древние греки, когда им приходилось умножать числа, рисовали прямоугольники; результатом умножения трех на пять был прямоугольник со сторонами три и пять. Это — развитие счета на камушках... Множество закономерностей, возникающих при действиях с числами, были обнаружены древнегреческими учеными при изучении чертежей. И долгие века лучшим подтверждением справедливости таких соотношений считался способ геометрический, с прямоугольниками, квадратами, пи-

рамидами и кубами. Даже в XVII веке, когда была уже хорошо развита алгебра с обозначениями величин буквами, со знаками действий, многие считали ее варварской наукой, пригодной для низменных целей — бытовых расчетов, вспомогательных вычислений, — но никак не для благородных научных трудов... Один из крупнейших математиков того времени, **Бонавентура Кавальери**, пользовался алгеброй, ибо вычислять с ее помощью проще, но для обоснования своих научных результатов все алгебраические выкладки заменял рассуждениями с геометрическими фигурами.

Кстати, вы не догадались еще, почему числа $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$



= 256 и так далее не имеют своего названия, хотя у квадратов и кубов чисел такие названия есть? А дело в том, что мы живем в мире трех измерений (длина, ширина и высота). Квадрат получился, когда мы выложили фигуру с одинаковой длиной и шириной; куб — фигура с одинаковыми длиной, шириной и высотой. Но нет четвертого измерения, чтобы выложить такую же красивую фигуру из 2·2·2·2 камушков...

СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА

У простых чисел всего два делителя — само это число и единица, у числа 6 делителями будут 1, 2, 3 и само число 6. Если сложить делители, отличные от самого числа, то в этом случае снова получаем

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

Есть ли еще такие числа? Есть. Вот число 28. Проверьте, что

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

и что справа выписаны все делители этого числа, отличные от него самого. А еще? Есть и еще. $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$.

Числа, которые равны сумме всех своих делителей (исключая само число), древнегреческие математики назвали совершенными. Эти числа до сих пор остаются загадкой для математиков. Во-первых, все известные

совершенные числа четны, и неизвестно, могут ли существовать нечетные совершенные числа. Во-вторых, хотя найдено уже несколько десятков совершенных чисел, но неизвестно, конечно их число или бесконечно. Про четные совершенные числа кое-что было известно еще Евклиду. Он доказал, что если при некотором значении числа p число $2^p - 1$ — простое, то число $2^{p-1}(2^p-1)$ будет совершенным. Леонард Эйлер доказал, что такой вид имеют все четные совершенные числа.

Таким образом, поиск четных совершенных чисел свелся к поиску чисел вида 2^p-1, являющихся простыми. Поиском этих чисел много занимался французский монах Марен Мерсенн, математик, акустик, теоретик музыки, один из создателей Парижской академии наук. В его честь простые числа 2^p-1 стали называть числами Мерсенна.

Поиск чисел Мерсенна, а следовательно, новых совершенных чисел, сейчас ведут компьютеры, для которых такие задачи служат испытательными тестами. Найдено около 30 чисел Мерсенна, наибольшее из которых имеет в своей записи более ста тысяч цифр.

ДРУЖЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Пифагор говорил: «Мой друг тот, кто является моим вторым я, как числа 220 и 284». Эти два числа замечательны тем, что

сумма делителей каждого из них равна второму числу. Действительно, 1 + 2 + 4 + 5+ + 10 + 11 + 20 + 22 + 40 + 44 + 55 + +110 = 284, а 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.

Долго считалось, что следующую пару дружественных чисел 17 296 и 18 416 открыл в 1636 году знаменитый французский математик **Пьер Ферма** (1601—1665). Но недавно в одном из трактатов арабского ученого **Ибн аль-Банны** (1256—1321) были найдены строки: «Числа 17 296 и 18 416 являются дружественными. Аллах всеведущ». А задолго до Ибн аль-Банны другой арабский математик **Ибн Курра** (836—901) сформулировал правило, по которому можно получать некоторые дружественные числа. По этому правилу можно было найти числа Пифагора и Ибн аль-Банны, а также числа 9 363 584 и 9 437 056, найденные в 1638 году выдающимся французским математиком и философом **Рене Декартом** (1596—1650).

Многие авторы после Ибн Курры изучали дружественные числа, но ничего существенного не открыли. В их сочинениях присутствуют такие рецепты: «Чтобы добиться взаимности и любви, нужно на чем-либо написать числа 220 и 284, меньшее дать объекту любви, а большее съесть самому».

После Декарта первым получил новые дружественные числа **Леонард Эйлер** (1707—1783). Он открыл 59 пар дружественных чисел, среди которых были и нечет-

ные числа, например $3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107$ и $3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2699$. Он предложил пять способов отыскания дружественных чисел. Эту работу продолжили математики следующих поколений. В настоящее время известно 1100 пар дружественных чисел, найденных либо хитроумными способами, либо (в последнее время) перебором на компьютере. Любопытно, что на долю компьютера в этом списке досталось совсем немного чисел — большинство из них было открыто математиками «вручную».

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

Числа настолько вошли в жизнь человека, что им стали приписывать всякие магические свойства. Так, до сих пор многие не любят числа 13, число 666 называют «звериным числом», приносящим несчастье, счастливыми считают, например, совершенные числа, о которых также рассказано в этой книге.

При археологических раскопках в Китае и Индии были найдены квадратные амулеты. Квадрат разделен на девять квадратиков, в каждом из которых написано по одному числу от 1 до 9. Замечательно, что суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и по каждой из двух диагоналей были равны одному и тому же числу 15 (см. рис.1).

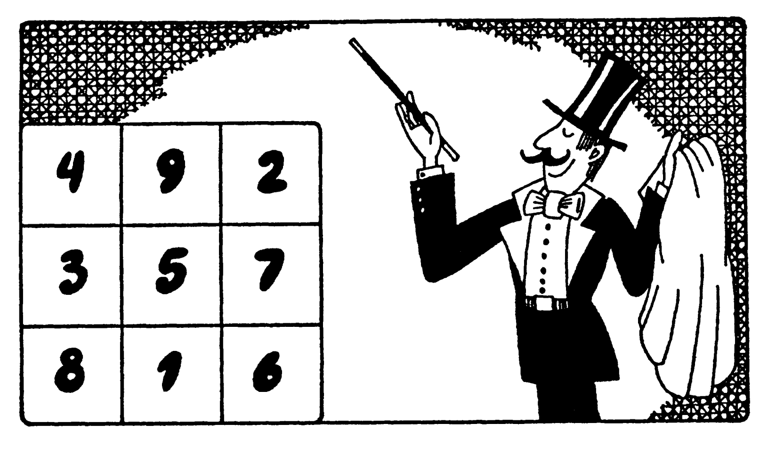


Рис. 1

В средние века магические квадраты были очень популярны. Один из магических квадратов изображен на гравюре знаменитого немецкого художника Альбрехта Дюрера, «Меланхолия». Любопытно, что два числа в середине нижней строки указывают год создания картины — 1514 г. Получение магических квадратов было популярным развлечением среди математиков, создавались огромные квадраты, например, 43x43, содержащий числа от 1 до 1849, причем обладающие помимо указанных свойств магических квадратов, еще и многими дополни-

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 2

тельными свойствами. Были придуманы способы построения магических квадратов любого размера, однако до сих пор не найдена формула, по которой можно было бы найти количество магических квадратов данного размера. Известно, и это вы можете легко показать сами, что магических квадратов 2x2 не существует. Магических квадратов 3x3 — один — остальные такие квадраты получаются из него поворотами и симметриями. Магических квадратов 4x4 уже 800, а количество магических квадратов 5x5 близко к четверти миллиона.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Дениска, герой рассказов В.Драгунского, задал однажды приятелю Мишке задачу: как разделить два яблока на троих? И когда Мишка, наконец, сдался, торжествующе объ-



явил ответ: «Сварить компот!» Мишка с Денисом еще не проходили дробей и твердо знали, что 2 на 3 не делится.

Собственно говоря, «сварить компот» — это действия с дробями. Порежем яблоки на кусочки и будем количества этих кусочков складывать и вычитать, умножать и делить — кто нам мешает?.. Нам важно только помнить, сколько мелких кусочков составляют целое яблоко...

Дроби появились в глубокой древности. Египтяне уже знали, как поделить два яблока на троих; для этого числа — $\frac{2}{3}$ — у них был даже специальный значок. Между прочим, это была единственная дробь в обиходе египетских писцов, у которой в числителе не стояла единица, — все остальные употреблявшиеся ими дроби непременно имели в числителе 1 (так называемые основные дроби): $\frac{1}{2}, \frac{1}{15}, \frac{1}{76}$... Если египтянину нужно было использовать другие отношения, он представлял их в виде суммы основных дробей; так, в одном из папирусов приведена задача, дающая в ответе $14\frac{28}{97}$. Дробь $\frac{28}{97}$ записана в виде суммы

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{97}+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}+\frac{1}{194}+\frac{1}{388}.$$

Работать с такими выражениями было неудобно, но почему-то $\frac{28}{97}$ не казалось египетскому автору красивым числом... Такое от-

ношение к дробям просуществовало очень долго. Уже погибла цивилизация древнего Египта, некогда зеленый край поглотили пески Сахары, а дроби все раскладывали в сумму основных — вплоть до эпохи Возрождения!

Интересно, что вавилоняне предпочитали, наоборот, постоянный знаменатель (равный 60, потому, видимо, что их система счисления была шестидесятиричной). Римляне тоже пользовались лишь одним знаменателем, равным 12.

Особое место занимали дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ и т.д. Дело в том, что в древности отдельной арифметической операцией полагали удвоение и деление пополам. Числа перемножали при помощи последовательных удвоений (например, $9 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 + 5$); деление пополам было не менее важно — как обратное к удвоению действие. Операция удвоения продержалась довольно долго; еще в XV веке ее считали особым арифметическим действием и рассматривали отдельно, наряду с умножением, делением, сложением и вычитанием.

Эти дроби сыграли определяющую роль в музыке. И сейчас в общепринятой нотной записи длинная нота — целая — делится на половинки (вдвое короче), четверти, восьмые, шестнадцатые и тридцать вторые. Любой ученик музыкальной школы знает с шести—семилетнего возраста, что $\frac{6}{8}$ — это три четверти, и что в одной половине восемь

шестнадцатых. Таким образом, ритмический рисунок любого музыкального произведения, созданного европейской культурой, каким бы сложным он ни был, определяется двоичными дробями... Пифагорейцы, много занимавшиеся музыкой и обожествлявшие число, исследовали, на сколько повышается тон струны, если ее прижать посередине, или на четверть расстояния от одного из концов, или на треть. Обнаружилось, что одновременное звучание двух струн приятно для слуха, если длины их относятся как 1:2, или 2:3, или 3:4, что соответствует музыкальным интервалам в **октаву, квинту** и **кварту**. Гармония оказалась тесно связанной с дробями, что подтверждало основную мысль пифагорейцев: «число правит миром»...

Дроби и действия с ними и сейчас не всем легко даются. Многие норовят «упростить» сложение дробей, складывая числители с числителями, а знаменатели — со знаменателями и обижаются, узнав, что так делать нельзя. Бывает, что сокращают дробь вот так: $\frac{1\not{6}}{\not{6}4} = \frac{1}{4}$ (и иногда получают правильный ответ). Не смущайтесь, если вам поначалу не даются дроби. Побольше терпения! Пусть вас вдохновляет то, что прежде умение обращаться с дробями было вершиной арифметики, великие умы гордились этим! А вы изучаете сей предмет в младших классах... Между прочим, со средних веков в немецком

языке сохранилась поговорка «попасть в дроби», равнозначная нашей «попасть в переплет» — о трудном, а то и безвыходном положении...

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Сколько проблем возникает с обыкновенными дробями, мы уже говорили. Куда проще обращаться с **десятичными дробями**, в которых цифры дробной части (после запятой) показывают, сколько в числе десятых долей, сотых, тысячных и т.д. — точно так же, как в целом числе цифры показывают число сотен, десятков и единиц.

Во-первых, чтобы складывать, вычитать или перемножать такие дроби, не нужно никаких специальных правил вроде столь мучительного поиска общего знаменателя, которым приходится то и дело заниматься, складывая обыкновенные дроби. Все они уже приведены к общему знаменателю — десять (или сто, или тысяча, как вам больше нравится). Во-вторых, сделать из обыкновенной дроби десятичную ничего не стоит — дели себе числитель на знаменатель, пока не разделится без остатка, да записывай после запятой цифры результата...

Вот тут-то и подстерегает неприятность! Подавляющее число таких делений не заканчивается никогда! Если делить, скажем, десять на три, мы будем снова и снова по-

лучать все ту же тройку... Выход есть — остановиться, убедившись, что остатки повторяются, и сказать: «10 делить на 3 — это 3 и 3 в периоде». Можно доказать, что любая обыкновенная дробь после перевода в десятичную либо когда-нибудь оборвется (при делении выскочит нулевой остаток), либо будет иметь период... Вот только период этот может оказаться очень и очень длинным! Попробуйте-ка вычислить период такой простой с виду дроби, как 1/49. В нем ровнехонько 42 цифры!

Можно придумать и число, в котором периода нет. Оно не будет получаться из обыкновенной дроби, но ничто не запрещает ему существовать. Такие числа — иррациональные.

Но практическим нуждам все эти тонкости совершенно не мешают. Кому может понадобиться длина веревки или даже размер детали сложного механизма с точностью до сорок второго знака после запятой, если даже размер электрона (в метрах!) отличается от нуля уже в семнадцатом знаке? Разумеется, в жизни просто округляют бесконечную десятичную дробь до конечной, а дальше с ней легко работать...

Появились десятичные дроби в трудах арабских математиков в средние века и независимо от них — в древнем Китае. Но и раньше, в древнем Вавилоне, использовали дроби такого же типа, но, конечно, шести-

десятиричные. В европейскую же практику десятичные дроби ввел Симон Стевин. До тех пор каждый, кто сталкивался с нецелыми числами, должен был возиться с числителями и знаменателями...

КАК ЗАПИСЫВАЛИСЬ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ*

В этой статье встречаются и знаменитые имена, и имена, известные лишь узкому кругу специалистов по истории математики. О некоторых из них мы приведем короткие биографические справки.

Франсуа Виет де ла Биготье (1540—1603) был юристом и советником у французских королей Генриха III и Генриха IV. Математикой он занимался «в свободное от работы время». Виет внес значительный вклад во все области современной ему математики, но особенно велики его заслуги в развитии алгебры: он был первым, кто начал употреблять алгебраическую символику. (Впрочем, его символика не получила широкого распространения. Современная алгебраическая символика в основном ведет свое начало от «Рассуждения о методе» Р.Декарта (1637 г.). В одной из его первых книг «Математические таблицы», опубликованной в 1579 году

* Статья написана Р. Гутером и Ю. Полуновым и опубликована в журнаое «Квант» в 1994 г.

в Париже, автор говорит о преимуществах десятичных дробей при вычислениях и сам широко их использует.

Выдающийся фламандский ученый Симон Стевин (1548—1620) — один из «универсальных гениев» эпохи Возрождения. Труды Стевина посвящены самым разнообразным вопросам современных ему математики, механики и физики. Но наибольшую славу ему принесла небольшая книжка «Десятая», изданная в 1585 году в Лейдене. В ней автор выступил популяризатором десятичных дробей. Подробно поясняя технику выполнения арифметических операций с десятичными дробями, он всячески подчеркивает простоту излагаемого материала: «...Может же недалекий умом деревенский медведь по счастливой случайности набрести на дорогой клад, не применив при этом никакой учености!» «Десятая» получила широкую известность в Европе. На французский язык она была переведена в том же 1585 году самим автором. На английском языке она появилась в 1608 году.

Джованни Антонио Маджини (1555—1617) был профессором университета в Болонье. Он использовал десятичную запятую в таблицах своей книги «Плоские треугольники», изданной в 1592 году в Венеции.

Швейцарец Иост Бюрги (1552—1632) был сначала часовщиком и механиком, помогал строить и ремонтировать астрономические

инструменты, а затем помогал Кеплеру в обработке астрономических наблюдений и других вычислениях. В 1592 году он составил таблицу синусов и написал руководство по арифметике. В них он систематически применял десятичные дроби. В 1616 году Кеплер писал о нем: «...так как часто будут получаться дроби, а мне желательно пользоваться короткими числами, то заметь, что все цифры, стоящие после знака 0, принадлежат дроби в качестве числителя, знаменателя же к ней не пишут, но он всегда есть — круглое десятичное число со столькими нулями, сколько цифр стоит после знака... Такой вид вычислений с дробями придумал Иост Бюрги... Благодаря этому, с целыми числами и с дробью при всех основных действиях можно обращаться как с одним числом».

В 1603 году франкфуртский врач Иоганн Гартман Бейер (1563—1625) выпустил сочинение «Десятичная логистика», где писал: «...я обратил внимание на то, что техники и ремесленники, когда измеряют какую-нибудь длину, то очень редко и лишь в исключительных случаях выражают ее в целых числах одного наименования; обыкновенно им приходится или брать мелкие меры, или обращаться к дробям, точно так же астрономы измеряют величины не только в градусах,но и в долях градуса, т.е. минутах, секундах и т.п.; но мне кажется, что их

деление на 60 частей не так удобно, как деление на 10, на 100 частей и т.д., потому что в последнем случае гораздо легче складывать, вычитать и вообще производить арифметические действия; мне кажется, что десятичные доли, если бы их ввести вместо шестидесятиричных, пригодились бы не только для астрономии, но и для всякого рода вычислений».

Немецкий священник **Бартоломей Питиск** (1561—1613) известен в истории математики как автор нескольких книг по тригонометрии и обширных тригонометрических таблиц. Имено он первый предложил термин «тригонометрия».

Имя великого ученого — астронома, физика и математика — **Иоганна Кеплера** (1571—1630) известно сейчас любому школьнику. При исследовании движения планет ему приходилось проводить колоссальную вычислительную работу и он пользовался десятичными дробями, о которых узнал от Бюрги.

Шотландский барон **Джон Непер** (1550—1617) знаменит как изобретатель логарифмов и «палочек Непера» — простого приспособления для умножения многозначных чисел. В книге «Рабдология», вышедшей в 1617 году незадолго до его смерти, он использовал десятичную запятую. В другой своей книге «Построение удивительной таблицы логарифмов», вышедшей после его смерти, но

написанной много раньше, он рекомендует использовать десятичную точку.

Профессор математики и астрономии в Лондоне и Оксфорде **Генри Бриггс** (1561—1631) совместно с Непером разработал систему десятичных логарифмов и выпустил первые таблицы их.

Английский математик **Вильям Оутред** (1575—1660), изобретатель первых логарифмических линеек, был в течение 50 лет приходским священником и обучал желающих математике. Обозначать умножение «косым крестом» × впервые предложил он.

Хотя «знаковая фантазия» не иссякла еще и в XVIII веке, основная борьба велась уже между десятичной точкой и десятичной запятой. Эти знаки появились почти одновременно. Непер, колеблясь между ними, использовал оба знака. Со времени появления «Новой арифметики» Г.Бёклера (1661) в математических книгах, издаваемых в Германии, укоренилась десятичная запятая. Постепенно она прочно утвердилась в континентальной Европе, тогда как в англоязычных странах предпочитают десятичную точку, причем в Англии ее сейчас ставят в середине строки: 14·382, а в США — внизу: 14.382. (В качестве знака умножения в англоязычных странах обычно применяют «косой крест» ×).

В последние 25—30 лет, под влиянием алгоритмических языков программирова-

ния, десятичная точка стала постепенно теснить десятичную запятую. Поскольку в них принята именно десятичная точка, а для умножения «косой крест», люди, связанные с программированием, — а таких становится все больше и больше, — предпочитают эту систему обозначений.

АЛЬ-ХОРЕЗМИ

Выдающийся арабский ученый Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми (что означает — из Хорезма) жил и работал в IX веке нашей эры в Багдаде. Тогдашний багдадский правитель халиф аль-Мамун почитал ученость и покровительствовал наукам. По его повелению в Багдаде был построен «Дом мудрости» с библиотекой и обсерваторией, и в эту, по нашим нынешним понятиям, академию собрались почти все крупные ученые арабского халифата.

Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми был среди тех ученых, которым халиф поручил переводы греческих математических трудов, измерение дуги меридиана и ряд других научных работ. Его перу принадлежат много книг по математике и астрономии. Его арифметический труд был одним из источников, по которым впоследствии Западная Европа познакомилась с десятичной позиционной системой счисления: аль-Хорезми разъяснил

в ней индийскую систему записи чисел и изложил правила письменного счета в этой системе. Арабский оригинал этой книги утерян, но сохранился латинский перевод XII века. Имя автора, в латинской транскрипции «Алгоризми», привело к появлению в языке математики слова «алгоритм», первоначально означавшему нумерацию по десятичной позиционной системе; впоследствии так стали называть труды, способствовавшие распространению в Европе индийского способа счета, а затем, наконец, и сам этот счет. В конечном итоге слово «алгоритм» стало обозначать совсем другое.

Другой знаменитый труд великого ученого по праву считается первой книгой по алгебре (само слово «алгебра» восходит к арабскому «аль-джебр», одному из терминов книги аль-Хорезми). Это исследование, посвященное решению уравнений. Аль-Хорезми изучил линейные и квадратные уравнения, называя переменную «корнем» уравнения (мы, вслед за ним, называем корнем уравнения значение переменной, удовлетворяющее этому уравнению), квадрат переменной — просто «квадратом». Родоначальник алгебраической науки не знал, разумеется, никакой алгебраической символики, — до ее создания оставалось еще несколько столетий, — и все свои выкладки описывал словами. Аль-Хорезми различал шесть типов уравнений:

«квадраты равны корням»,
«квадраты равны числу»,
«корни равны числу»,
«квадраты и корни равны числу»,
«квадраты и число равны корням»,
«корни и число равны квадратам».

Эти типы соответствуют разному расположению переменной, ее квадрата и числа в левой и правой частях уравнения. Отрицательных чисел еще не было, и уравнения $2x^2 + x = 5$ и $2x^2 + 5 = x$ казались не похожими друг на друга. Чтобы решить уравнение, аль-Хорезми сначала переносил все члены, оказавшиеся с отрицательным знаком, в другую часть, чтобы слева и справа в уравнении были только положительные числа (эта-то процедура и называлась «аль-джебр»), затем приводил подобные, чтобы не было нескольких слагаемых одной степени, и лишь затем решал уравнение.

Решение уравнений, чисто алгебраическое, подкреплялось для убедительности и геометрическим, — так, как решали свои арифметические задачи древние греки. Доказательств не было (в те времена доказательства были достижением только геометрии), способ решения задачи излагался в виде рецепта. Так что человек, давший имя алгоритму, приводил в своих трудах только алгоритмы решения уравнений!...

Аль-Хорезми был не только математиком. Среди его сочинений есть труд по географии;

он организовал несколько научных экспедиций в Византию, Хазарию (государство на нижней Волге), в Афганистан; под его руководством было выполнено очень точное по тем временам вычисление длины одного градуса земного меридиана. Но его успехи в математике затмевают все прочие достижения: ведь он один из немногих величайших умов мира, создавший новую науку!

КАЛЕНДАРЬ

Счисление времени, казалось, не содержит в себе проблем — день следует за днем, год за годом. Но почему-то одни года содержат по 365 дней, а другие по 366? Откуда взялись семидневные недели? Почему их не целое число в году? Вопросов много. Постараемся на них ответить.

Сначала точно определим, что такое год. Год — это время полного оборота Земли вокруг Солнца. Он составляет 365 суток, 5 часов 48 минут и 46 секунд или 365,242199 суток. А кто заставляет нас именно так определять год? Давайте считать годом 365 суток и дело с концом! Не тут-то было. В таком случае, например, весеннее равноденствие наступало бы все позже и позже — на 6 часов каждый год. Для одного поколения людей это было бы не очень заметно, а на протяжении нескольких поколений такое отставание было бы уже очень заметно. Что же делать?

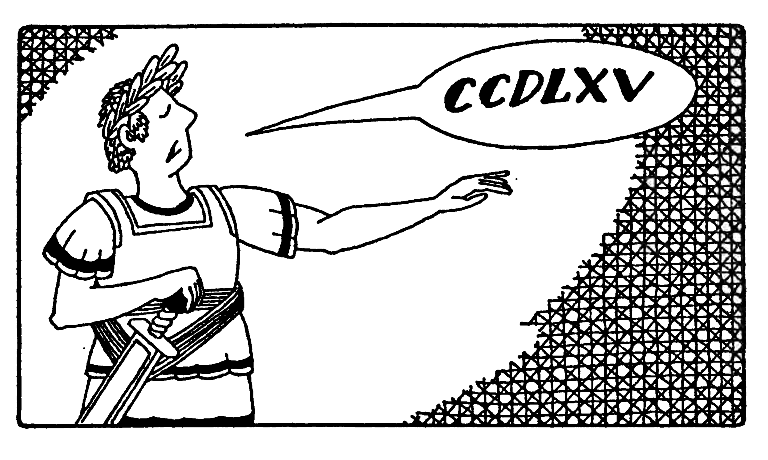
Жрецы Древнего Рима произвольно удлиняли годы, чтобы согласовать их счисление с временами года и астрономическими наблюдениями. Сначала в римском календаре было десять месяцев. Первым был март, названный в честь бога войны Марса, вторым — апрель, — пригреваемый Солнцем, дальше май, в честь богини Майи, четвертым был июнь — в честь богини Юноны. Названия следующих шести месяцев произошли от числительных. Пятый месяц назывался квинталис, шестой — секстилис, седьмой — септембер (сентябрь), восьмой — октобер (октябрь), девятый — новембер (ноябрь) и десятый децембер (декабрь). Первый день месяца назывался календой, отсюда и пошло название «календарь».

Через некоторое время количество месяцев увеличили до двенадцати. Одиннадцатый был назван януариусом (январем) в честь двуликого бога Януса, а двенадцатый стал месяцем очищения — februариус (февраль). Счислением времени ведали жрецы по своему усмотрению. Такие порядки не устраивали Юлия Цезаря. Он постановил считать одни годы по 365 дней, а другие по 366 дней, чередуя их: три коротких, четвертый длинный. В этой реформе календаря были учтены знания и опыт египетских жрецов и астрономов, в частности, к работе был привлечен александрийский астроном Созиген.

Заодно, начало года было перенесено с марта на январь. В результате шесть месяцев

потеряли смысл своих названий, а месяц квинталис, который стал уже не пятым, а седьмым, был переименован в июль в честь Юлия Цезаря. Все нечетные месяцы имели по 31 дню, четные — по 30 дней, кроме февраля, который имел 29 дней, а 30 только в високосные годы. Почему эта доля досталась именно февралю? Да потому, что до этого он был последним месяцем года.

Преемником Цезаря был первый римский император **Октавиан Август**. В его честь месяц секстелис был переименован в август. Но секстелис имел 30 дней, в то время как июль, посвященный Юлию Цезарю, имел 31 день, и было решено добавить к августу еще один день, отняв его у уже обиженного февраля.



Продолжительность года в юлианском календаре (так он называется в честь Юлия Цезаря) составляет 365 суток и 6 часов, что

превышает астрономический год на 11 минут и 14 секунд. Казалось бы такой ошибкой можно было бы пренебречь, но ведь она накапливается из года в год. К 325 году она составила уже 3 суток и день весеннего равноденствия оказался не 24 марта, как это было при Юлии Цезаре, а 21 марта. По этому поводу собрался Никейский собор, который перенес в календаре день весеннего равноденствия с 24 марта на 21 марта. Но ошибка продолжала накапливаться, к концу XVI века она достигла 10 суток и день весеннего равноденствия сместился на 11 марта.

Было решено провести реформу календаря, закрепив за днем весеннего равноденствия 21 марта. Инициатором реформы был римский папа Григорий XIII, а разработал ее итальянский врач, математик и астроном Алиозий Лилио. Решение комиссии по разработке нового календаря было очень простым: сдвинуть числа на 10 дней, оставить чередование простых и високосных лет, но если год оканчивается двумя нулями, а число его сотен не делится на 4, то такой год будет простым, а не високосным. Так, 1900 год — простой, а 2000 — високосный.

По новому календарю, который в честь папы Григория XIII назвали григорианским, продолжительность года составила 365 целых и 97/400 суток или 365,2425 суток. Это лишь на 26 секунд больше астрономического года.

Интересная система календаря была предложена среднеазиатским математиком Омаром Хайямом, который известен больше как поэт. Он предложил считать високосными 8 лет из каждых 33. В этом случае продолжительность года составит 365 целых и 8/33 года, что дает погрешность всего в 19 секунд за год. Русский астроном И.Медлер в 1864 году предложил с XX века ввести в России следующую поправку к календарю: через каждые 128 лет пропускать один високосный год из 32 високосных лет, приходящихся на этот период. Такой календарь давал бы погрешность всего в 1 секунду в год.

Кроме смены времен года и времени суток на Земле наблюдается еще один периодический процесс — смена фаз Луны. За год происходит 12 таких чередований, поэтому в году 12 месяцев. Продолжительность лунного месяца составляет 29,530588 суток, а лунного года — в 12 раз больше, приблизительно 354,367056 суток, что почти на 11 суток меньше астрономического года. Лунный год стал основой для мусульманского календаря, который появился в 622 году нашей эры, и с этого года по нему ведется летосчисление в мусульманском мире. В настоящее время мусульманский лунный календарь распространен наряду с григорианским в тех странах, где исповедуется ислам.

С фазами Луны связано и возникновение недели, как четверти полной смены фаз Луны. Число 7 помимо количества дней в не-

деле обозначало для древних число известных им планет (включая Солнце и Луну), число известных им металлов. Да и мы сейчас говорим: «семь раз отмерь, один отрежь», или «семеро одного не ждут».

АБУ РАЙХАН БЕРУНИ

Первая половина XI века и предшествовавшие ему два столетия характеризовались бурным развитием культуры народов Ближнего Востока и Средней Азии. Создание и развитие больших оживленных городов, цветущих оазисов, ирригационных систем, формирование международных торговых путей, строительство дворцов и храмов стимулировали исследования в области математики, геодезии, астрономии.



Беруни А. Р.

Широко известны работы среднеазиатских астрономов и математиков XI—XVI вв. Среди них одно из почетных мест принадлежит знаменитому ученому Абу Райхану Мухаммад ибн Ахмад ал-Беруни. В этом человеке сочетались лучшие черты ученого — преданность

науке, неугасимая страсть к познаниям, целеустремленность и самоотверженность.

Абу Райхан Беруни родился 4 сентября 973 года в Узбекистане в предместье г. Кят (теперь этот город, расположенный в низовьях Амударьи, называется Бируни — это арабский вариант имени ученого). Первые годы своей жизни он провел в семье хорезмшаха Мамуна. Там на его выдающиеся способности обратил внимание известный ученый Абу Наср Мансура ибн Али ибн Ирака, который привил юному Беруни интерес к естественным наукам и особенно к математике и астрономии. Вспоминая этот период своей жизни, Беруни в одном из своих последних стихотворений писал: «Семья Ираков вскормила меня своим молоком, а их Мансур взялся вырастить меня...»

Получив прекрасное образование на родине, Беруни уже в юности производил самостоятельные наблюдения и около 995 года первым в средней Азии построил глобус, позволявший определять географические координаты населенных пунктов с достаточной для того времени точностью, занимался конструированием астрономических инструментов и определил географические координаты различных мест Хорезма. Его пытливый ум, постоянное стремление к приобретению знаний не могли быть удовлетворены образованием, полученным в семье Ираков, и Беруни посвящает много времени изучению филосо-

фии, математики, астрономии и других наук. С этой же целью он ездил в такие крупные научные центры, как Багдад и Бухара и в различные города Хорасана и Афганистана.

В 1004 году вернувшись в Хорезм, в его новую столицу — Гургандж, Беруни занимает должность советника шаха и руководит созданной к тому времени академией. Вокруг Беруни группируются блестящие ученые, приглашенные хорезм-шахом из разных стран. Украшением академии был знаменитый Абу Али ибн Сина (Авиценна), великий естествоиспытатель, врач и философ. После захвата Хорезма султаном Махмудом Газиевидским в 1017 году Беруни вместе с другими учеными вынужден был переселиться в Газну (Афганистан), где и прожил до конца жизни. Здесь он занимается астрономией, математикой и геодезией. В этот же период Беруни дважды побывал в Индии; там он не только провел работы по определению размеров Земного шара, но и собрал обширный материал по истории, географии, этнографии и философии этой страны.

Перу Беруни принадлежит около 150 научных работ, относящихся к самым различным областям науки: астрономии, математике, минералогии, географии, геодезии, истории, лингвистике и другим. Его первая капитальная работа «Памятники, оставшиеся от минувших поколений» (около 1001 го-

да) включает описание календарных систем различных народов (греков, римлян, хорезмийцев, аридов, евреев, персов и др.), историю развития науки, культуры, обычаев и т.п. В книге рассказывается об астрономических видах месяцев (лунных, солнечных и високосных), о происхождении названий месяцев у разных народов. Эта книга как источник исторических и этнографических сведений о народах древнего Востока не потеряла своего значения и в наши дни.

В 1025 году Беруни заканчивает свой трактат «Определение границ мест для уточнения расстояний между пунктами», в котором — первый из астрономов-мусульман — дает детальную разработку метода определения географической долготы пункта путем одновременного наблюдения лунного затмения из двух точек при известной долготе одной из них. Затем следует уникальный фундаментальный труд «Книга, содержащая разъяснения принадлежащих индийцам учений, приемлемых разумом или отвергаемых», кратко называемая «Индия» (ок. 1031 г.).

«Книга вразумления в начатках искусства звездочетства», содержащая изложение вопросов геометрии, арифметики, географии и астрономии, долгие годы служила учебником в медресе (так называются религиозные мусульманские школы) всего Ближнего Востока. «Я начал с геометрии, затем пере-

шел к арифметике и числам, затем к устройству Вселенной, а затем к астрономии, ибо лишь тот достоин звания звездочета, кто полностью изучил эти четыре науки», — пишет Беруни во введении. Эта книга содержит 511 вопросов и ответов, из них 119 относятся к математике (планиметрии, теории отношений, стереометрии, теории чисел, арифметике, алгебре, буквенной нумерации), а остальные — к астрономии, геодезии и астрологии. «Геометрия — это наука о размерах и количественных отношениях их друг к другу, и это познание особенностей их фигур и форм, имеющихся в теле. Благодаря этой науке наука о числах превращается из частной в общую, а наука о сфере (т.е. астрономия) из догадок и предположений — в истину», — говорит Беруни. Как видите, это определение мало отличается от нынешнего, даваемого в школе...

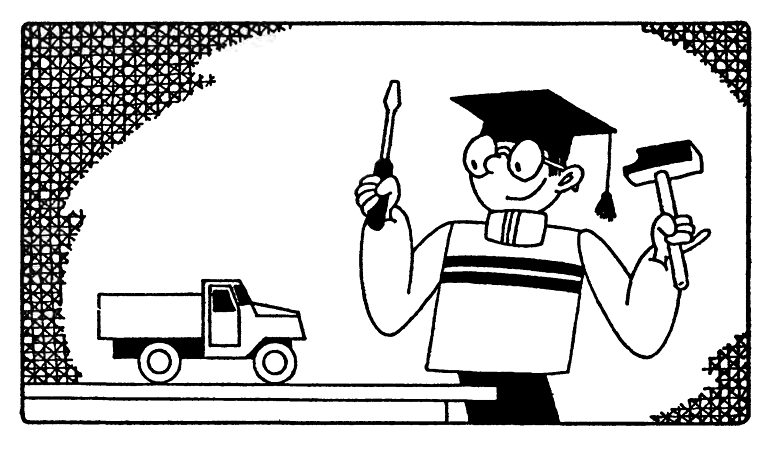
Примерно в 1037 году Беруни закончил «Канон Мас'уда по астрономии к звездам» — свой главный труд, основное содержание которого составляют вопросы астрономии и математической географии. В ней как бы подводится итог деятельности Беруни в области астрономии, которая в то время считалась одной из ветвей древа математических наук.

О последних годах жизни Беруни известно очень мало: одиночество, старость и, как всегда, напряженный труд. Семьи у него не было, учеников — очень мало. Вероятно,

он видел свое предназначение в том, чтобы передавать свои знания не одиночкам, а всем людям. «Все мои книги — дети мои, а большинство людей очаровано своими детьми и стихами», — писал ученый. 11 декабря 1048 года Абу Райхан Беруни умер. Но, как он и хотел, его книги читают до сих пор — пусть и не с целью научиться точным наукам, далеко шагнувшим вперед за тысячу лет...

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Человеку свойственно любопытство. Сколько игрушек переломано детьми, чтобы узнать, как они устроены, что у них внутри.



Люди, сохранившие на всю жизнь это любопытство, — ученые. Они установили, что все вещества состоят из молекул, молекулы

из атомов, атомы из элементарных частиц электронов, позитронов, нейтронов. Сейчас ученые пытаются понять, из чего состоят элементарные частицы, придуманы для этой цели частицы «кварки».

А из чего составлены целые числа? Конечно же, из единиц. Число 12 есть сумма двенадцати единиц. Но в то же время 12 = = 3·4 = 2·6. В свою очередь число 4 равно 2·2, а 6 = 2·3. Числа 2 и 3, так же как и числа 5, 7, 11, 13, дальше не раскладываются, поэтому их назвали простыми. Эти числа имеют лишь два множителя — единицу и себя самого. Число 1 не считают простым, поскольку оно раскладывается на два одинаковых множителя: 1 = 1·1.

Все вы знаете что такое решето, с помощью которого отделяют мелкие частицы от более крупных. Так после помола зерна



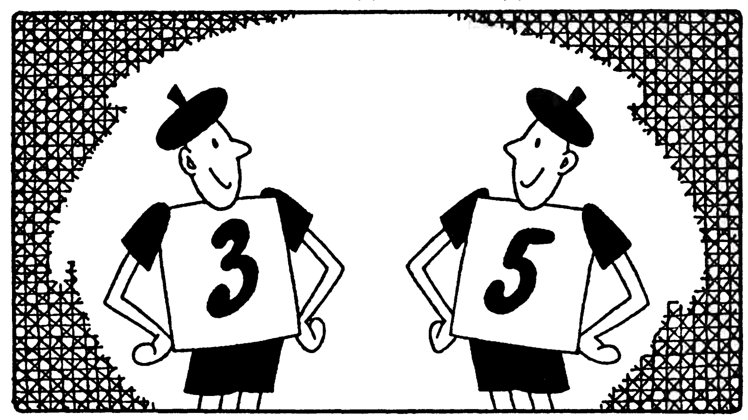
отделяют муку от отрубей, так очищают песок от камней и т.д.

Древнегреческий математик Эратосфен придумал решето для нахождения простых чисел. Пусть мы хотим разыскать все простые числа, меньшие 100. Запишем их в виде таблички, зачеркнем единицу, которую мы условились не считать простым числом, и первое из оставшихся чисел обведем кружком, оно будет простым. Это — число 2. Теперь вычеркнем все числа, делящиеся на 2, кроме самой двойки. Это можно сделать просто вычеркиванием половины столбцов таблицы. Первым из оставшихся чисел будет число 3. Обводим его кружком, это будет второе по величине простое число. Дальше вычеркиваем все числа, делящиеся на 3, при этом уже вычеркнутые числа можно не вычеркивать. Из оставшихся первым будет число 5, которое вновь обводим кружком, а затем вычеркиваем все остальные числа, делящиеся на 5, для чего достаточно вычеркнуть столбец, в котором стоит число 5. Обводим кружком первое из оставшихся чисел — число 7 и вычеркиваем все числа, делящиеся на 7. Теперь замечаем, что все оставшиеся не вычеркнутыми числа — простые. Действительно, числа 8, 9 и 10 уже вычеркнуты; если число, большее 10, но меньшее 100, раскладывается на два множителя, то хотя бы один из них меньше 10, а все такие числа мы уже вычеркнули.

Осталось обвести кружками все оставшиеея числа. Вот они: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Много ли среди целых чисел простых? Оказывается, что бесконечно много. Это доказал еще Евклид три тысячи лет назад. Он рассуждал так. Пусть их конечное число, тогда перемножим их все и к произведению прибавим единицу. Полученное число при делении на все простые числа будет давать в остатке единицу, следовательно, это число не может быть составным. Значит, оно простое. Но оно больше, чем любое из простых чисел, которые мы перемножили! А мы предположили, что в произведение вошли все простые числа. Таким образом, предположение о конечности количества простых чисел привело нас к противоречию; следовательно, простых чисел бесконечно много.

Простые числа — простой математический объект, но загадок они доставили ма-



тематикам немало, и многие еще не разгаданы.

Если присмотреться к ряду простых чисел, то можно отметить, что все они, кроме 2, нечетные. Любопытны пары: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 41 и 43, 59 и 61, 71 и 73. Эти числа отличаются на 2. Их называют близнецами. Сейчас с помощью мощных компьютеров вычислены миллиарды простых чисел, среди которых регулярно встречаются близнецы, но до сих пор неизвестно, конечно или бесконечно количество пар близнецов.

Долгое время математики искали формулу, которая давала бы все простые числа. Леонард Эйлер указал на формулу $n^2 - n + 41$, которая при всех целых значениях n от 0 до 40 дает простые числа, однако при $n = 41$ получается число, делящееся на 41.

Простые числа распределены очень прихотливо: между числами-близнецами стоит всего одно число, но можно указать такие простые числа, между которыми стоит миллион чисел, все из которых составные. Однако знаменитый русский математик П.Л.Чебышев доказал, что между каждым натуральным числом и вдвое большим числом находится всегда хотя бы одно простое число. Это утверждение впервые высказал французский математик Ж.Бертран, но доказать его не смог.

Еще одну загадку, не разгаданную по сей



Виноградов И. М.

день, предложил в 1742 году российский академик Х.Гольдбах. Он заметил, что любое четное число, большее 2, можно представить, в виде суммы двух простых чисел, а любое нечетное число, большее 5 — как сумму трех простых чисел. Полностью это утверждение не доказано и не опровергнуто до сих пор. То, что это утверждение выполняется для всех очень больших нечетных чисел, доказал академик И.М.Виноградов в 1938 году.

ПЬЕР ФЕРМА

(1601—1665)

В истории математики Пьер Ферма занимает особое место. Он известен как автор «великой теоремы Ферма», которая чрезвычайно просто формулируется и которую до сих пор еще не удалось доказать.

Сумма квадратов двух целых чисел снова может быть квадратом целого числа. Например, $5^2+12^2=13^2$. Теорема Ферма утверждает, что для более высоких степеней подобное невозможно, т.е. уравнение $x^n+y^n=z^n$ не

имеет решений в целых числах ни при каких $n > 2$.

Сотни квалифицированных математиков и тысячи дилетантов в течение трехсот лет пытались доказать эту теорему. В 1993 году на страницах многих газет, не склонных писать о математике, промелькнула сенсационная новость: теорема наконец-то доказана! Но вскоре, как бывало уже не раз, в доказательстве обнаружилась ошибка.

Ферма вошел в славную когорту «обыкновенных гениев» начала XVII века, вместе с Декартом, Паскалем, Гюйгенсом... Но, справедливости ради, надо отметить, что именно его долгое время считали сильнейшим математиком века — вплоть до появления работ Ньютона и Лейбница.

Как и Декарт, Пьер Ферма родился на юге Франции, получил всестороннее образование — не только естественнонаучное, но и гуманитарное. Большую часть жизни он проработал юристом в парламенте города Тулузы. Хотя в то время математика уже была уважаемой наукой, но еще не считалась профессией.



Ферма П.

Научных журналов тоже еще не существовало (первый из них появился в год смерти Ферма). Поэтому математики обменивались сведениями о своих достижениях в личной переписке. В историю науки вошло имя парижского священника Мерсенна, сыгравшего роль информационного центра для математиков разных стран. Сообщить о своем открытии Мерсенну означало опубликовать его для всей Европы.

В 1636 году Ферма отправил Мерсенну письмо, в котором изложил свой метод решения задач о максимуме и минимуме. Мерсенн переслал копию этого письма другим математикам, в том числе Декарту. Рассуждения Ферма, использующие бесконечно малые величины, показались Декарту недостаточно ясными, и он подверг работу младшего коллеги резкой критике. Так через две тысячи лет после работ Архимеда возобновились споры о законности действий с бесконечно малыми величинами, не утихавшие до XIX столетия.

Одновременно с Декартом Ферма пришел к созданию аналитической геометрии — науки, описывающей геометрические фигуры при помощи координат и формул. Однако Ферма пользовался неудобными обозначениями и не претендовал на открытие «универсальной математики», поэтому его рукопись была менее известна, чем «Геометрия» Декарта.

Ферма был одним из отцов теории вероятностей — современной науки, без которой невозможна работа страховых компаний, или, скажем, расчеты мощностей телефонных станций. Поводом для его исследований были азартные игры, особенно игра в кости, весьма распространенная в то время.

Помимо всего этого, Ферма оказался единственным математиком XVII века, занимавшимся арифметикой. Именно с его работ начинается современная теория чисел. Настольной книгой Ферма стала «Арифметика» древнегреческого математика Диофанта. Кстати, на полях этой книги Ферма и записал ту знаменитую теорему, с которой мы начали этот рассказ.

СВЕРХСОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Человеку свойственно выискивать самое-самое во всем, с чем он имеет дело, «Книга рекордов Гинесса» — тому подтверждение. А какое число самое большое? Такого числа нет, поскольку всякое число мы можем увеличить, прибавив к нему единичку. А какое число самое маленькое среди положительных чисел? И такого нет, т.е. любое положительное число можно уменьшить, разделив его, например на два.

Поищем чемпионов среди натуральных чисел по числу делителей. Меньше всего раз-

личных делителей у числа 1, всего один — сама единичка. У всех простых чисел по два делителя — само число и единичка. А у какого натурального числа больше всего делителей? Ясно, что такого числа нет, так как умножив натуральное число, скажем, на два, мы увеличиваем количество его различных делителей.

Те, кто интересовался спортом, знают, что у борцов, штангистов и боксеров разыгрывается несколько чемпионских званий для разных весовых категорий. Попробуем таким же образом выявить чемпионов среди натуральных чисел по количеству делителей. Чемпионом, а точнее, сверхсоставным числом, будем называть натуральное число, которое имеет больше делителей, чем каждый из меньших его натуральных чисел.

Какое сверхсоставное число будет наименьшим? Конечно же, единичка со своим



единственным делителем, поскольку просто нет натуральных чисел, меньше единицы. Следующим числом идет число 2 с двумя делителями 1 и 2, дальше 4 с тремя делителями 1, 2 и 4, потом число 6 с четырьмя делителями. Казалось бы, что следующим должно идти число с пятью делителями. Наименьшее такое число 16, его делители 1, 2, 4, 8, и 16. Но его опередило число 12, у которого 6 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, и 12. Поэтому число 16 не стало сверхсоставным, а им стало число 12.

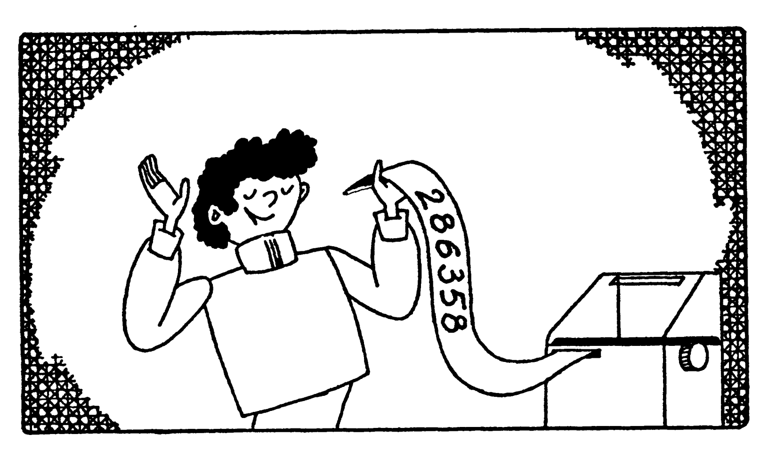
Попробуйте сами отыскать следующих чемпионов.

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Издавна существует способ проверки правильности умножения: вычисляется сумма цифр у каждого сомножителя и у произведения; если среди полученных чисел не все однозначные, то у них вновь и вновь вычисляются суммы цифр до тех пор, пока они не станут однозначными. После этого перемножаются однозначные числа, соответствующие сомножителям, и у этого произведения вычисляется сумма цифр. Если полученное число совпадает с однозначным числом, вычисленным для произведения первоначальных чисел, то умножение начальных чисел считается выполненным верно.

Этот способ основан на более общем признаке делимости на 9, чем тот, который изучается в школе. Дело в том, что остаток при делении числа на 9 равен остатку при делении на 9 его суммы цифр. Частным случаем этого признака будет случай остатка, равного нулю, т.е. знакомый вам признак: число делится на 9, если его сумма цифр делится на 9.

Простым и очень полезным является признак делимости на 11. Сложим цифры числа, стоящие на четных местах, и вычтем из этого числа сумму цифр, стоящих на нечетных



местах. Начальное число будет делиться на 11 в том, и только в том случае, если на 11 делится полученное меньшее число.

Любопытное применение нашел этот способ при исследовании числа «счастливых» билетов. Некоторое время назад в трамваях, троллейбусах и автобусах кондукторы про-

давали билеты. Затем эта процедура была переведена на самообслуживание: пассажиры сами бросали деньги в кассу и отрывали билеты. Каждый билет имел шестизначный номер, например, 286358. Этот билет в Москве считался «счастливым» в силу того, что сумма его первых трех цифр — 16 — равняется сумме оставшихся трех цифр. Тут же возникла задача: насколько часто встречаются «счастливые» билеты, точнее, сколько «счастливых» чисел среди чисел от 000000 до 999999?

В то же время в Санкт-Петербурге (тогда еще Ленинграде) «счастливыми» считались билеты, у которых сумма цифр, стоящих на четных местах, равнялась сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Если немного подумать, то нетрудно понять, что «счастливых» билетов «по-московски» столько же, сколько и «по-ленинградски». Но билет, счастливый «по-ленинградски», делится на 11, в то же время не всякое шестизначное число, делящееся на 11, будет номером билета, «счастливого по-ленинградски», например, число 405000.

Значит, билетов, «счастливых по-ленинградски», как и билетов, «счастливых по-московски», меньше, чем чисел, делящихся на 11. Чисел до миллиона, делящихся на 11, как нетрудно подсчитать, 90910, значит, «счастливых» билетов меньше. На самом деле их 55252, т.е. «счастливым» оказывался в среднем каждый 18-й билет.

Вы знаете признаки делимости на 2, 3 и 5. Из них легко вывести признаки делимости на 4 и 6. А каков признак делимости на 7? Заметим, что 1001 = 7·11·13, и воспользуемся этим фактом. Пусть нам нужно проверить, делится ли число 286364 на 7. Запишем это число в виде: 286286 + 78. Первое слагаемое делится на 7 (а также на 11 и 13), поскольку оно делится на 1001, а второе на 7 не делится, значит, это число не делится на 7. Заметим, что 78 делится на 13, поэтому первоначальное число делится на 13. Таким образом, мы получили не только признак делимости на 7, но и признак делимости на 13, а также еще один признак делимости на 11.

Нетрудно сформулировать признак делимости на 8: число делится на 8, если число, составленное из трех его последних цифр, делится на 8.

Признаки делимости на большие числа также существуют, но они более громоздки.

ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Что делать, если надо разделить на троих десять конфет? Одна конфета остается, и каждый хочет ее получить. Чтобы никому не было обидно, ее можно разыграть. Встанем в кружок, произнесем считалку, и тот, на ком она закончится, получит желанную добычу.



При чем тут деление с остатком? Ну да, десять при делении на 3 дает в остатке 1. Но считалка — тоже замечательный пример деления с остатком! Ведь как ей пользуются? Раздают каждому по слову, считалка обходит несколько кругов, и только последние несколько слов — остаток — действительно влияют на то, кто же «выйдет вон». Если дать себе труд пересчитать слова в считалке и разделить их количество на число стоящих в круге, можно встать именно на то место, где закончится стишок — и конфета ваша.

Обращать внимание только на остаток приходится очень часто. Если вам во вторник 28 июня вздумается узнать, каким днем недели будет 1 сентября, не нужно долго

считать: до конца июня осталось 2 дня, да в июле 31 день, да в августе еще 31; итого 64 дня, и 1 сентября — 65-й, начиная с сегодняшнего. Но в неделе 7 дней, а 65 = = 7·9 + 2; значит, 65-й день — все равно что второй. Сегодня вторник, значит, 1 сентября, как и послезавтра, четверг.

Это можно было вычислить и иначе. В июле 31 день, т.е. 4 полных недели и еще 3 дня. В августе — тоже. Набегает 6 дней, и 1 сентября — седьмой; вот еще одна полная неделя. Итак, с 1 июля по 1 сентября проходит сколько-то (неважно сколько) полных недель и ни днем больше. Значит, 1 сентября — всегда тот же день недели, что и 30 июня. Но 30 июня — четверг, и 1 сентября — тоже.

Сейчас мы занимались тем, что складывали остатки от деления на семь, отбрасывая полные недели. Таким образом, суммой ос-

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

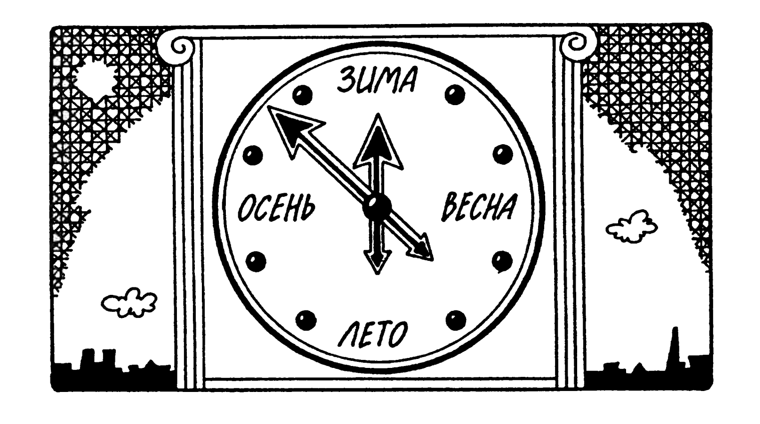
X	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	4
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	4	2	1

Рис. 1

татков от деления на 7 мы посчитали остаток от деления на 7 обычной суммы чисел, которыми выражались складываемые остатки. Подобным образом можно ввести и умножение остатков, и перед нами окажется несколько странная с виду конструкция: в ней всего 7 чисел, от 0 до 6, следующее число — 6 + 1 — снова равно нулю, и числа начинают повторяться, как дни недели. Но эти числа, как и обычные, можно складывать и умножать, вычитать и делить друг на друга (кроме, разумеется, деления на ноль), оставаясь в том же круге.

На рис. 1 приведены таблицы сложения и умножения в такой арифметике. Чтобы найти разность чисел, скажем $x = 4 - 6$, решим уравнение: $x + 6 = 4$. Теперь в столбике с цифрой 6 находится число 4, которое стоит в строке с числом 5, значит $4 - 6 = 5$. Точно так же находим по второй таблице число $x = 4 : 6$. Теперь $6x = 4$. Снова находим в последнем столбце цифру 4. Она стоит в строке с цифрой 3. Значит $x=3$. Однако, деление будет однозначно определено, если число, определяющее остатки (в нашем случае 7) — является простым.

Такой же круг чисел образует и время суток; часы с 12-часовым циферблатом повторяют снова и снова числа от 1 до 12, и 12 — одновременно и 0, если циферблат 24-часовой, то в круге — числа от 0 до 23, и 0 — одновременно — 24 часа... Сколько кругов пробежали стрелки с тех пор, как



сутки стали мерить часами? Никто этого не знает, и никому это не нужно: здесь работают только остатки от деления на 24 (или 12, в зависимости от марки вашей «машины времени»).

В былые времена целые цивилизации считали время ходящим по кругу: зима... весна... лето... осень... опять зима... и снова весна... Их время не имело начала где-то в туманном прошлом и не катилось в необозримое будущее, как наше, а лишь вращалось вокруг невидимой оси, подчиняясь правилам поведения остатков...

ПЕРВОЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО

В мире выходит множество книг, их оформляют художники, которые не только рисуют иллюстрации, но и определяют раз-

меры книги: ее величину, длину и ширину. Эти размеры, как правило, находятся в постоянном отношении. Дело в том, что в типографии листы бумаги, прибывшие с бумажной фабрики, при печати книги складывают вдвое вдоль, потом вдвое поперек, затем снова вдоль и т.д., пока не получится требуемый формат. А вот каким должен быть исходный лист бумаги, чтобы все прямоугольные листы, получающиеся при складывании, были подобны друг другу?

Решим эту задачу. Если большая сторона листа равна x, а меньшая — y, то после сложения получим прямоугольник, у которого большая сторона — y, а меньшая — $x/2$. Составим пропорцию: $x:y = y:x/2$. Из нее получаем, что $x^2:y^2 = 2$, а $x:y = \sqrt{2}$. Это соотношение часто встречается в форматах книг. Проверьте его на своих книгах. Часто встречается и соотношение, равное «золотому сечению» $\tau = \frac{(\sqrt{5} + 1)}{2}$.

Число $\sqrt{2}$ было первым числом, про которое древнегреческие математики узнали, что оно не выражается в виде обыкновенной дроби. Это открытие их настолько поразило, что держалось в строжайшей тайне. Существует легенда, повествующая о том, что математик, разгласивший эту тайну, погиб во время кораблекрушения в море — так он был наказан богами за болтливость.

Число $\sqrt{2}$ греки получили, конечно же,

не из задачи с листом бумаги, а как длину гипотенузы прямоугольного треугольника, у которого катеты равны по единице. Такие треугольники были известны давно, еще в древнем Вавилоне. На сохранившихся рисунках видно, что авторы иллюстрировали частный случай теоремы Пифагора — площадь квадрата, построенного на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

Прямоугольники с отношением сторон, равным $\sqrt{2}$, встречаются не только среди форматов книг. Это соотношение часто используется в архитектуре, например, в пропорциях известного храма Покрова на Нерли.

Числа, непредставимые в виде обыкновенных дробей стали называться **иррациональными** — недоступными пониманию, а обыкновенные дроби — **рациональными** **числами**, т.е. понятными, хорошо усвоенными.

За первым иррациональным числом появилось следующее, а затем выяснилось, что таких чисел даже больше, чем рациональных. Так, числа $\sqrt[3]{5}$, $2 + \sqrt{3}$, тоже иррациональны. Они являются корнями уравнений $x^3=5$ и $x^2 - 4x + 1 = 0$. Долгое время считали, что всякое число является корнем подобного уравнения, но сто лет назад выяснилось, что для некоторых чисел таких уравнений нет. К ним относится и число π («пи»). Эти числа назвали **трансцендентными**.

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

Пятиконечная звезда — **пентаграмма** — очень красива, недаром ее помещают на свои флаги и гербы многие страны. Ее красота, оказывается, имеет математическую основу. Но сначала проведем маленький опыт. Попробуйте начать рисовать пейзаж и проведите на листе бумаги — будущей картине — линию горизонта. Думаем, что у вас получится результат, очень похожий на рис. 1. Почему вы и многие другие художники проводят линию горизонта именно так? А потому, что отношение высоты картины к расстоянию от верхнего края до линии горизонта равно отношению расстояния от верхнего края до горизонта к расстоянию от линии горизонта до нижнего края. Это отношение и есть отношение **золотого сечения.**

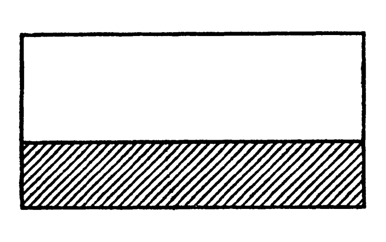


Рис. 1

Пропорции золотого сечения часто использовались художниками не только при проведении линии горизонта, но и в соотношениях между другими элементами картины. Леонардо да Винчи находил это соотношение в пропорциях человеческого тела.

Древнегреческий скульптор Фидий использовал золотое сечение при оформлении Парфенона.

Так чему же равно золотое сечение? Вернемся к рисунку 1. Если высоту картины принять равной 1, а расстояние от верхнего края до горизонта обозначить через x, то из условий золотого сечения получим: $1:x = x:(1 - x)$. Преобразовав это уравнение, получим $x^2 - x - 1 = 0$. Положительный корень этого уравнения равен $(\sqrt{5} + 1)/2$. Это число обычно обозначают греческой буквой τ — тау. Часто его обозначают и другой греческой буквой φ — фи, в честь Фидия.

Обратимся теперь к пятиконечной звезде (рис.2), в ней, как говорится, «где ни копни — везде золото». Точка D делит отрезок CA в отношении τ, она же делит и отрезок AE в том же отношении; длины отрезков AC и AB, как и длины отрезков AB и AD, также находятся в золотом отношении.

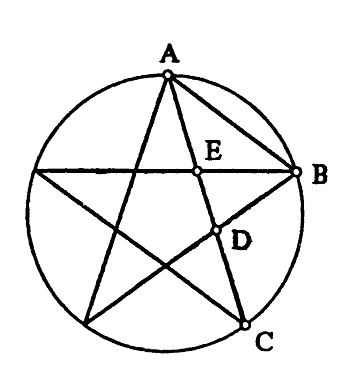


Рис. 2

Число τ имеет несколько любопытных представлений в виде бесконечных последовательностей:

$$\tau = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}},$$

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

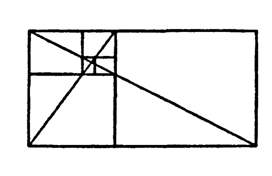


Рис. 3

И еще одно замечательное свойство прямоугольника, стороны которого находятся в отношении τ. Если от такого прямоугольника отрезать квадрат см. рис. 3, то останется прямоугольник, отношение сторон которого вновь равно τ. Если от него снова отрезать квадрат, то вновь получим золотой прямоугольник. Попробуйте проверить этот факт на почтовой открытке, поскольку эти открытки, как правило, имеют отношение сторон, равное золотому сечению.

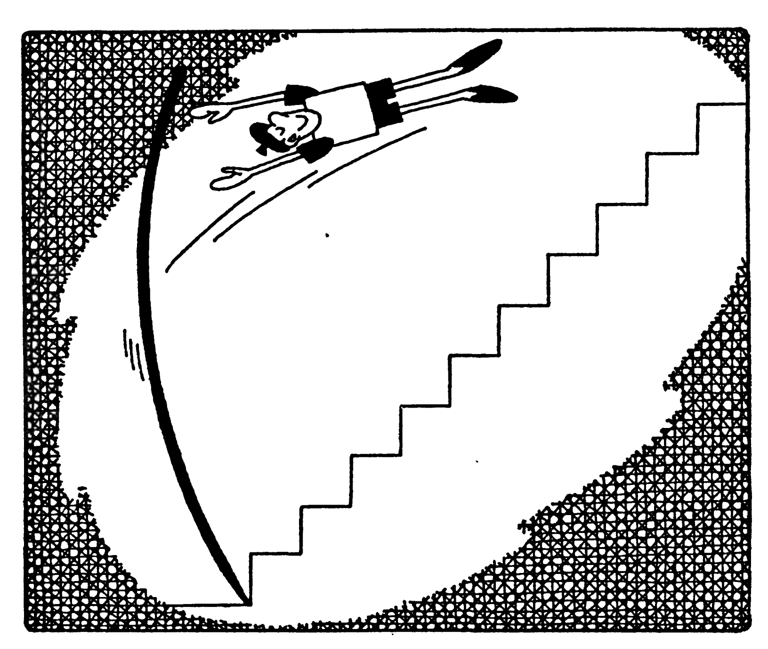
ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

Когда мы поднимаемся по лестнице, то каждый шаг мы делаем на следующую ступеньку или перешагивая через одну ступеньку. Давайте подсчитаем, сколькими различными способами мы можем подняться на лестницу из десяти ступенек. Если бы у лестницы была всего одна ступенька, то был бы всего один способ на нее подняться, при двух ступеньках есть уже два способа: либо идти по одной ступеньке за шаг, либо сразу встать на вторую ступеньку. Легко подсчитать, что на лестницу из трех ступенек можно подняться уже тремя способами. «Ясно! — крикнут наиболее нетерпеливые. — На лестницу из десяти ступенек можно подняться десятью способами». И будут неправы, поскольку на четырехступенчатую лестницу можно подняться уже пятью способами, а на пятиступенчатую — восемью.

Перебирать все варианты для лестницы с десятью ступеньками занятие довольно кропотливое, нельзя ли получить результат быстрее? Да, можно. Заметим, что подняться на четвертую ступеньку можно либо со второй ступеньки — перешагнув через ступеньку, либо с третьей, поэтому количество способов попасть на четвертую ступеньку равно сумме количества способов попасть на вторую и на третью ступеньки. И вообще, количество способов попасть на некоторую сту-

пеньку равно сумме числа способов попасть на предыдущую и на предпредыдущую. Теперь задача существенно облегчилась. Будем выписывать числа, равные количеству способов подняться на одну, далее на две, на три ступеньки и т.д., пользуясь тем, что каждое следующее число равно сумме двух предыдущих. Получаем 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,... Итак, число способов подняться на лестницу с десятью ступеньками равно 89. Нетрудно теперь подсчитать и число способов подняться на двадцатиступенчатую лестницу.

Если к этой последовательности чисел мы впереди припишем еще одну единичку — количество способов подняться на лестницу



с нулем ступенек, то получим последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,... , которую первым получил крупный итальянский математик эпохи Возрождения Леонардо Фибоначчи, изучая численность потомства одной пары кроликов, если она ежемесячно производит пару крольчат, а те через месяц также начинают производить потомство.

Числа Фибоначчи встречаются во многих областях математики, поэтому они хорошо изучены. Сто пятьдесят лет назад французский ученый Ж.Бине нашел формулу для вычисления произвольного члена последовательности Фибоначчи: если обозначить k-й член последовательности Фибоначчи через u_k, *то его значение равно* $u_k = \dfrac{\tau^k - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^k}{\sqrt{5}}$, *где* $\tau = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, есть отношение золотого сечения, о котором вы можете прочесть в этой книге. Эта формула выглядит страшновато, в ней присутствуют иррациональности, но она позволяет выявить закономерности последовательности Фибоначчи: скорость ее роста, делимость на различные числа.

Для чисел Фибоначчи выполняются любопытные соотношения, например,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1,$$
$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}.$$

РАЗНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Как мы считаем вслух? Один, два, три, ..., восемь, девять, десять, одиннадцать... Десять мы записываем двумя цифрами, но не говорим «один-ноль», а используем новое слово. Новое слово нам нужно писать и для чисел 100, 1000, 1 000 000... В нашем словаре остались следы давно забытой системы счисления, для каждого из этих чисел имевшей свой знак. Таким же напоминанием о седой древности служит слово «сорок»; в нем нет никаких признаков «десятка», хотя и тридцать (три-десять), и пятьдесят, и семьдесят содержат в себе упоминание о количестве десятков. А выражение «сорок сороков», ставшее сейчас просто обозначением большого количества? Выходит, наши предки считали, по десять до сорока, а затем сорок! Во французском языке сохранились следы счета на двадцатки, в английском — на дюжины...

До изобретения нуля для записи чисел, как сейчас для их названия, применялись все новые знаки. В разные времена и в разных странах господствовали **непозиционные системы счисления**, в которых значение цифры не зависит (или не вполне зависит) от занимаемого ею места. Они удобны при записи не очень больших чисел, но если складывать в них не так уж сложно, то умножение сопряжено с большими затратами

ума и сил; чтобы записать очень большое число, приходится идти на разные ухищрения, и запись получается длинной... Наиболее совершенные из непозиционных систем — алфавитные (таковы были системы счисления в Древней Греции и на Руси) — обозначали большие числа теми же буквами, но с добавлением дополнительных значков ($1 - \tilde{a}$, $1000 - \tilde{a}$, $10000 - \tilde{a}$, и т.п.)

Шагом вперед стали позиционные системы. Сейчас повсеместно победила десятичная позиционная система счисления, но были и другие. Собственно говоря, позиционную систему можно построить на любой основе, исходя из счета не только десятками, но и пятерками и двадцатками...

Посмотрим на наши десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Следующее число — десять — мы записываем двумя цифрами 10 (один десяток, ноль единиц). А если бы мы



были из племени, считающего по пять? Сколько бы нам понадобилось цифр? Пять: 0, 1, 2, 3, 4. После четырех идет пять, т.е. одна пятерка и ноль единиц: 10. Шесть запишется так: 11 (одна пятерка, одна единица), восемь — 13, десять — 20 (две пятерки, единиц нет). С непривычки кажется неудобным, но такая система ничуть не хуже десятичной.

Точно так же можно построить шестиричную (с шестью цифрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5), и троичную (в ней три цифры: 0, 1, 2), и «сколько угодно-ичную» системы счисления. Правда, если это «сколько угодно» будет больше десяти, придется придумать дополнительные значки для недостающих

цифр — два знака для двенадцатиричной, шесть для шестнадцатиричной...

Экономные древние вавилоняне в своей «двухэтажной» системе обошлись всего тремя знаками: Y–для единицы, ≺–для десятка и ⋞–для нуля. Внутри каждой шестидесятки цифра сооружалась из десятков и единиц. Так что «первый этаж» строился, как в древних непозиционных системах: YYYYY – 5, ≪YYYYY – 25

Из этих сложных цифр и нуля составлялось число — «второй этаж». Так, 60 записывалось (одна шестидесятка; ноль единиц). А вот число побольше: ≪Y⋞YYYYY (21 «три-тысячи-шестисотка», т.е. 21 раз по 60·60, 0 шестидесяток, 5 единиц). Всего три цифры, а равно оно 21·60·60 + 5 = 75605!

Большего числа, чем 60, в основе системы счисления ни у одного народа не было. А вот система с самым маленьким основанием — двоичная. В ней всего две цифры: 0 и 1. Двойка там — уже 10, четверка — уже 100, а 32 — 100 000. Числа получаются очень длинными. Зато правила сложения и умножения — проще не придумаешь: 1+0 = 1, 1+1 = 10, 1·0 = 0, 1·1 = 1. Никаких таблиц умножения!

Эта система счисления так проста, что кажется игрушечной, этакой забавой для начинающих. Между тем сейчас рядом с нами без устали трудятся многочисленные вычислители, не признающие других систем, кро-

ме двоичной. Это — компьютеры. Чем двоичная система хороша для вычислительных машин? Именно тем, что в ней только две цифры. Научить машину различать два символа легко: включено — значит, 1, выключено — значит, 0; есть ток — 1, нет тока — 0... Сначала были попытки сделать машины, способные различать большее количество цифр. Но они оказались ненадежными, все время путали, бедные: то ли 1, то ли 2...

Правда, пришлось придумывать, как покороче записать в машинной памяти длинные двоичные числа. Но это оказалось проще, чем объяснить машине, что такое 2...

ДЛЯ ЧЕГО НУЖНЫ ПРОЦЕНТЫ?

Много ли соли в морской воде? Этот вопрос можно понимать по-разному. Например, сколько весит вся соль, растворенная в морях и океанах? А можно и так: сколько соли содержится в ведре морской воды? Ответить на первый вопрос «очень просто». Достаточно знать ответ на второй и еще узнать, сколько же ведер воды содержится в морях и океанах.

Жители приморских городов и поселков могут попробовать ответить и на второй вопрос. Для этого достаточно набрать ведро морской воды, поставить его на огонь и греть, пока вся вода не выкипит, а затем взвесить оставшуюся на дне соль. Вот только можно

ли утверждать, что у соседа получится столько же? Видимо нет. Его ведро может оказаться больше или меньше, или просто он поленился и налил не так полно, и в результате будет выпаривать другое количество воды, а поэтому получит другое количество соли.



Похоже, что наша мера солености морской воды — количество граммов на ведро воды — оказалась неудачной. Возьмем другую меру — количество граммов соли на килограмм раствора. Пусть масса раствора 8,4 кг, а масса соли 21 г. Тогда получаем ответ: 5/2 грамма соли на килограмм раствора. Если опыт повторить, то получится почти такая же величина.

Но почему число граммов в килограмме, а не центнеров в тонне или английских фунтов в русском пуде? Давайте-ка будем считать число граммов в грамме! Тогда тот же

ответ получим, если будем считать число тонн соли в тонне раствора или пудов в пуде.

Итак, поскольку в килограмме содержится 1000 граммов, то и ответ получится в тысячу раз меньший: 5/2000 = 1/400.

Подходящая мера получена, но запись... Скажите, какое число больше, 11/1002 или 12/1090? Сразу и не скажешь, нужно считать. Куда легче сравнивать десятичные дроби! Дробь 0,01097 меньше, чем 0,01101, потому что число единиц, десятых и сотых у них одинаково, а число тысячных у второй дроби больше. Удобно? Конечно.

Ну что же, будем записывать результат не обыкновенной, а десятичной дробью. А дальше...

Стойте, скажет нетерпеливый читатель, зачем столько премудрости ради какой-то морской воды? Взять да и попробовать на вкус — соленая или не очень. Хорошо, ответим мы, а нужно ли точно знать содержание металла в руде, жира в молоке, химических веществ в лекарстве?.. Вот то-то! А ведь задача та же самая.

Итак, мы договорились записывать ответ в виде десятичной дроби. А с какой точностью? С помощью карандаша и бумаги мы можем делить хоть до миллиардных долей, но точны ли сами числа — делимое и делитель? Если весы в магазине показывают 520 г, то на самом деле предмет может весить и 515 и 524 грамма. А двести—триста лет

назад точность весов была еще меньше. Поэтому верными можно было считать лишь одну—две первые цифры, потому величину содержания одного вещества в другом имело смысл рассматривать с точностью до двух первых цифр: 0,27, 0,64, 0,37 и т.д., то есть 27 сотых, 64 сотых, 37 сотых.

В переводе с латыни «процент» — сотая часть. Вот мы и пришли к процентам. Была придумана их специальная запись: %. Говорят, что этот знак, признанный всем миром, возник из-за ошибки наборщика, у которого сломалась литера.

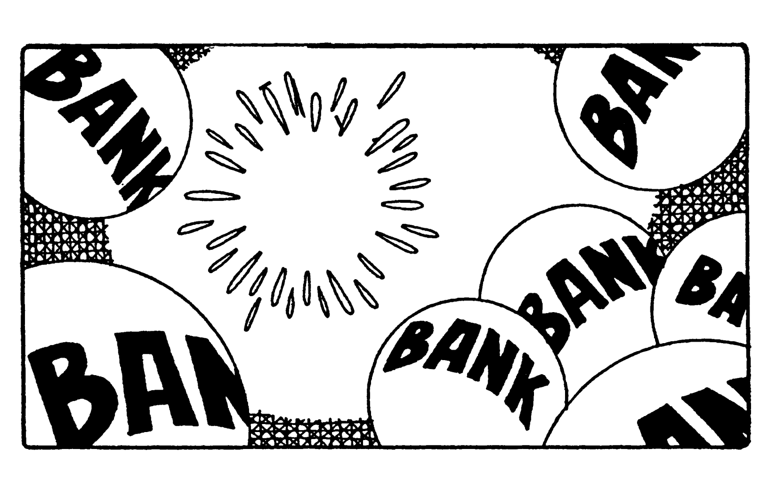
Запись отношений стала удобнее, исчезли нули и запятая, а символ % сразу указывает, что перед нами относительная величина, а не граммы, литры, рубли или метры.

Проценты были известны индусам еще в V веке нашей эры. Это неудивительно, потому что в Индии с давних пор счет велся в десятичной системе счисления. В Европе десятичные дроби появились на 1000 лет позже, их ввел бельгийский ученый Симон Стевин. Он же в 1584 году впервые опубликовал таблицы процентов. Со временем люди научились извлекать из вещества его компоненты, составляющие тысячные доли от массы самого вещества. Тогда, чтобы не вводить нули и запятую, ввели новую величину: «промилле» — тысячную часть, которую обозначили так: ‰, и вместо 0,6% стали писать 6‰.

БАНКОВСКИЙ ПРОЦЕНТ

Предположим, что вы хотите положить в банк десять тысяч рублей, чтобы на них «росли проценты». В сбербанке вам предложат 120% годовых, если вы кладете деньги на 3 месяца, 130% годовых, если положите на 6 месяцев и 150% годовых при вкладе на год.

В банке «Триумф» вам предложат 200% годовых при вкладе на год. Подсчитаем, сколько вы получите через 5 лет. Поскольку каждый год вы будете получать 200% годовых, то за пять лет получите в пять раз больше, — 1000%, т.е. 100 000 рублей к своим 10 000 рублей. Верно? Нет, не верно! Считать следует иначе. За год ваш вклад утраивается, т.е. через год у вас будет 30 000 рублей, а за второй год он еще утроится и составит 90 000 рублей. Тоже самое будет



происходить после третьего, четвертого и пятого года. Поэтому после третьего года у вас будет уже 270 000 рублей, после четвертого года — 810 000 рублей, а после пятого — 2 430 000 рублей, а не 110 000 рублей, как мы предполагали сначала.

Может быть, какой-нибудь банк платит еще больше? Да, сколько угодно! Вот банк «Мечта» предлагает вкладчикам 1000% годовых. Это означает увеличение вклада за год в 11 раз, за два года в 121 раз, за три — в 1331 раз, за четыре — в 14641 раз и за пять лет в 161 051 раз. Таким образом через пять лет, положив 10 000 в банк «Мечта», вы можете получить 1610 510 000 рублей и станете миллиардером!

Но имейте ввиду, что скорее всего однажды вы увидите на закрытых дверях банка объявление, из которого узнаете, что банк лопнул, и его вкладчики лишились вложенных в него сбережений. И вместе с «Мечтой» лопнула ваша мечта стать миллиардером. Так что, выбирая между сбербанком и банком «Триумф», может быть стоит отдать предпочтение сбербанку, как более надежному.

Теперь стоит выбрать способ вложения денег: на 3 месяца, на 6 месяцев или на год. Казалось бы, лучше всего положить на год, что дает самый высокий процент годовых — 150%. Но, наученные расчетами с другими банками, давайте проверим.

Если положить на полгода из расчета 130% годовых, то через полгода получим доход в 65% от вложенной суммы, т.е. сумма увеличится в 1,65 раза. Если затем еще раз положить все полученные деньги опять на полгода, то сумма возрастет в 1,65·1,65 = = 2,7225 раза, т.е. на 172,25%, что существенно больше 150% при вкладе сразу на год.

А если положить деньги на 3 месяца, потом еще, еще и еще раз на 3 месяца? В первый раз прибыль составит четверть от 120%, т.е. 30% от вложенной суммы. Это значит, что вклад увеличится в 1,3 раза. За следующий месяц она увеличится еще в 1,3 раза, что даст увеличение первоначальной суммы в 1,69 раза. Через следующие три месяца увеличение составит 2,197 раза, а к концу года получим увеличение в 2,8561 раза. Таким образом получаем 185,61% годовых, что лишь немного меньше, чем в банке «Триумф», но без всякого риска. Правда, при этом нужно приходить в банк каждые три месяца, чтобы забирать вклад и снова класть его на три месяца.

Но есть еще форма вклада под 100% годовых с правом снять вклад в любое время с получением соответствующей доли прибыли. Вот, наверное, золотая жила! Ведь мы убедились, что чем чаще кладешь и берешь вклад, тем большей оказывается прибыль. Если ходить в Сбербанк каждый день, то каждый раз вклад будет увеличиваться в

$1 + \frac{1}{365}$, а за год увеличение составит $\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365}$ раз. Наверное, это очень большое число!

Мы должны вас разочаровать. Величина числа $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ действительно увеличивается с увеличением n, но не может превзойти числа $e = 2{,}71828...$ и стремится к этому числу с увеличением n. Число e названо так с честь Леонарда Эйлера. Оно играет важную роль во многих разделах математики.

Итак, даже бегая в сбербанк каждый час, нам не удастся получить доход больший 172% годовых, если мы примем эту форму вложения денег.

ФИНАНСОВЫЕ ПИРАМИДЫ

В последнее время много говорят и пишут о финансовых операциях, которые называют финансовыми пирамидами. Такие операции проводят (или проводили) «МММ», «Хопер», «Тибет», «РДС», «Телемаркет» и другие. Давайте разберемся в механизме таких операций.

До появления в нашей стране подобных акционерных обществ, время от времени затевались «денежные игры по почте». Скажем, вы получаете письмо, в котором гово-

рится, что если выслать по указанным пяти адресам по одному рублю, а затем разослать еще пятерым такие же письма, вычеркнув первый адрес и дописав свой последним, то через некоторое время вы получите уйму денег.

В письме обосновывался и способ быстрого обогащения. От первых пяти адресатов вы получаете 5 рублей, возвращая затраченные деньги. Они посылают письма уже в 25 адресов, откуда вы получаете 25 рублей. От игроков третьего круга вы получаете еще 125 рублей, от игроков четвертого круга в 5 раз больше — 625 рублей, а от участников пятого круга 3125 рублей. Итого 3900 рублей. В то время это были большие деньги, соответствующие нынешним 10 миллионам рублей.

Хотя желающих разбогатеть «по щучьему велению» немало, но в выигрыше оказывались только устроители такой игры. Дело в том, что число участников увеличивается в 5 раз с каждым кругом. Если пятерка устроителей разошлет, скажем, 120 писем со своими адресами, то в первом круге участвуют 120 человек, во втором — 600, в третьем — 3000, в четвертом — 15000, в пятом — 75000, в шестом — 375000, в седьмом — 1875000, в восьмом — 9375000, в девятом 46875000, а в десятом 234375000 — все население страны. Так что участник, включившийся в игру в восьмом или девятом круге уже не получит ничего.

Итак, с этой игрой все ясно — первые получают деньги за счет последующих, а тем в конце концов не от кого будет их получать. Перейдем теперь к акционерным компаниям, которые обещают богатство за счет быстрого повышения курса своих акций.

Здесь вроде бы все в ажуре. Акционеры и хозяева компаний получают прибыль «из воздуха». Действительно, месяц назад вы купили акцию за 10000 рублей, а сейчас можете ее продать за 15000 рублей, правда и купить ее можно лишь за 17000 рублей, но ведь через месяц их можно продать за 20000. И компания имеет прибыль, покупая акцию за 15000 и тут же продавая за 17000 рублей. Все довольны.

Но вот стоимость акции превысила 100000 рублей и уже не всякий может ее купить, как это случилось с «МММ». Количество сдающих акции начало превышать количество покупающих, и прибыль в компанию перестала поступать. Тут-то эта компания лопается, поскольку, даже если все полученные ранее деньги тратились лишь на выкуп акций, то оставшихся не хватит для оплаты акций всем акционерам по последнему курсу. А ведь огромные деньги были уплачены за рекламу! А реклама необходима, чтобы привлечь как можно больше простаков в ряды акционеров.

ПРОГРЕССИИ

Людям свойственно подмечать закономерности в окружающих явлениях. Мир чисел — не исключение. Простейших навыков счета достаточно, чтобы подметить систему в последовательности: 1, 7, 13, 19, 25... или 1, 2, 4, 8, 16...

С последовательностями, в которых каждое следующее число больше (или меньше) предыдущего на одно и то же число, люди столкнулись в древнейшие времена, считая тройками, десятками, дюжинами... Такие последовательности называются **арифметическими прогрессиями.**

Геометрические прогрессии — последовательности, в которых каждый элемент больше (или меньше) предшествующего в одно и то же число раз — были обнаружены позже арифметических, но тоже очень давно. Вероятно, первая ситуация, в которой людям пришлось с ними встречаться — подсчет численности стада, проведенный несколько раз, через равные промежутки времени. Если не происходит никаких чрезвычайных событий, количество новорожденных

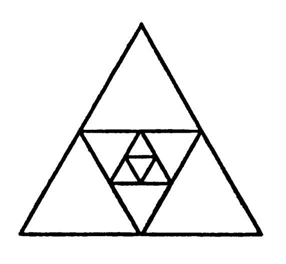


Рис. 1

и умерших животных пропорционально числу всех животных в стаде. Значит, если за какой-то период времени количество овец у пастуха увеличилось с 10 до 20, то за следующий такой же период оно снова вырастет вдвое и станет равно 40.

Название «геометрическая прогрессия» объясняется тем, что последовательности такого рода легко могут возникнуть в геометрических построениях. Например, если начертить серию равносторонних треугольников так, чтобы вершины каждого следующего треугольника лежали на серединах сторон предыдущего (рис. 1), площадь треугольника будет каждый раз уменьшаться вчетверо.

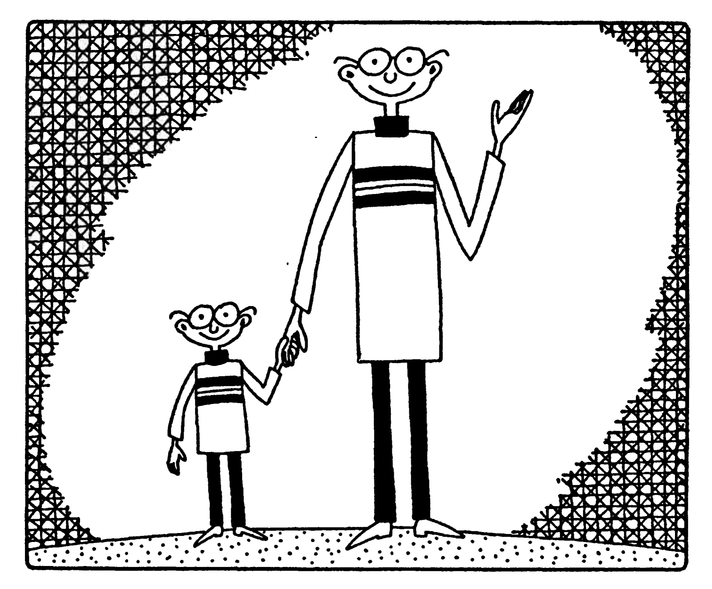


Рис. 2

Геометрические прогрессии удивляют своим чрезвычайно быстрым ростом. В первой из написанных выше прогрессий последующий член больше предыдущего на 6, а во второй — «всего лишь» в 2 раза. Но уже на шестом члене геометрическая прогрессия перегонит арифметическую: $32 > 31$. А если сравнить, скажем, шестьдесят четвертые члены? В арифметической прогрессии это $1+63\cdot6 = 379$, а в геометрической $2^{63} = 9\ 223\ 372\ 036\ 854\ 775\ 808$.

Легенда рассказывает, что индийский мудрец, изобретатель шахмат, попросил у раджи в награду одно зерно за первую клетку шахматной доски, два — за вторую, четыре за третью и так далее. Могущественному радже эта просьба показалась скромной до неприличия. И как же он был ошарашен потом!

Так что математика математикой, а в жизни с растущими геометрическими прогрессиями надо обращаться осторожно. Если в геометрической прогрессии растет стадо — скоро ему не хватит пастбища. Если число распадов в куче плутония — дело идет к атомному взрыву. А если доходы фирмы — ой, не связывайтесь с этими «благодетелями»!

СПОРТЛОТО, ПОЛЕ ЧУДЕС И ДРУГИЕ ИГРЫ

Мало у кого есть знакомые, выигравшие крупные суммы в «Спортлото». Но люди все-таки играют. Математик, прежде чем купить билеты той или другой лотереи, подсчитает шансы получить выигрыш. Давайте и мы попробуем научиться этому.

При игре в «Спортлото» можно выбрать два варианта: «6 из 49» или «5 из 36». Начнем с первого. Здесь главный выигрыш у того, кто угадает все 6 номеров, выпадающих на лототроне. Возможностей зачеркнуть в карточке 6 номеров много. А сколько? Первым на лототроне может быть любой из 49 шаров. Следующий шар может быть любым уже из 48 шаров, поэтому с каждым из 49 способов выбора первого числа существует 48 способов выбора второго числа, а всего $49 \cdot 48 = 2352$ способа. Третье число может быть любым из оставшихся 47 чисел, поэтому три первых числа можно выбрать $49 \cdot 48 \cdot 47 = 110544$ способами. Теперь уже ясно, что шесть чисел можно выбрать $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10068347520$ способами.

Но эти десять с лишним миллиардов есть число способов лототрону выбросить свои шесть шаров, а если вы зачеркнули в карточке, скажем, числа 5, 13, 21, 29, 37 и 45, то вы получите главный приз и в том

случае, если эти числа будут появляться на лототроне в любом другом порядке. А сколькими способами можно переставить в разном порядке шесть чисел? Об этом вы можете прочитать в этой книге, а можете догадаться и сами, рассуждая подобно тому, как мы считали число способов появления чисел на лототроне. Это число равно произведению $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Значит, чтобы получить количество способов зачеркнуть шесть чисел на карточке «Спортлото», нужно разделить полученное нами число 10068347520 на 720. Получаем 13983816 способов зачеркивания. И только один из этих почти четырнадцати миллионов соответствует тому набору чисел, который выбросит лототрон. Один шанс из четырнадцати миллионов!

Хорошо, пусть не главный приз. А какие шансы угадать пять номеров? Это уже просто. Из выигрышного набора шести чисел нужно убрать одно из чисел (это можно сделать шестью способами) и заменить его на одно из 43 невыпавших чисел. Получаем $6 \cdot 43 = 258$ способов зачеркнуть шесть чисел в карточке, чтобы ровно пять из них были правильными. Итак, имеем 258 шансов из 13983816 угадать пять номеров или один шанс из 54200.

Таким же образом можно оценить шансы угадывания четырех и трех номеров. В случае четырех правильно угаданных номеров

нужно выбросить два номера из выигрышной шестерки и заменить их невыпавшими числами, а в случае трех правильно угаданных номеров — выбросить три номера, заменив их тройкой номеров из оставшихся 43 номеров.

Настало время дать общую формулу, по которой можно найти количество способов выбрать k элементов (чисел или других объектов) из заданного набора из n элементов. Итак, первый элемент может быть выбран n способами, второй — $(n - 1)$ способом, третий — $(n - 2)$ способами и т.д., k-й — $(n - k + 1)$ способом. Всего $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)$ способов, и это число следует разделить на количество различных перестановок этих k элементов, число которых равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ — *это число обозначается* $k!$ и читается «ка-факториал». Используя это обозначение для произведения последовательных чисел, можно коротко записать количество способов выбрать k элементов из n:

$$\frac{n!}{k!(n - k!)}$$

Это число имеет специальное обозначение и даже два разных:

$$C_n^k \quad \text{и} \quad \left(\frac{n}{k}\right)$$

и называется числом сочетаний из n элементов по k. Эти числа также называются **биномиальными коэффициентами**, потому что в разложении бинома $(x + 1)^n$ коэффи-

циент при x^k равняется числу сочетаний из n элементов по k.

Имея эту формулу, вычислим количество вариантов для тренера волейбольной команды выпустить на площадку 6 игроков из имеющихся 10. Имеем $n = 10$, $k = 6$, и число вариантов равно $10/(6\cdot4) = 210$. Много это или мало? Судите сами.

Теперь вы можете сами подсчитать шансы получить тот или иной приз в лотерее «Спортлото» «5 из 36», а мы перейдем к лотерее «Поле Чудес». Леонид Якубович обещает полный ящик денег, если вы угадаете победителя в каждой тройке игроков в играх месяца. Попробуем подсчитать шансы это сделать.

Итак, считаем, что в течение месяца проходит четыре передачи «Поля Чудес», а в каждой передаче участвуют три тройки игроков и еще одна, составленная из победителей в своих тройках. Таким образом, нужно угадать победителей в 16 тройках игроков. В каждой тройке, естественно, три варианта выбрать победителя, а всего 3^{16} вариантов, а это 43046721 вариантов. Это в три раза больше числа вариантов в «Спортлото».

Конечно же, степень риска при участии в лотерее зависит не только от шансов получить тот или иной приз, но и от величины призов и стоимости лотерейного билета. Ответы на вопросы, связанные с величиной вы-

игрыша в лотерею, дает теория вероятностей. Точнее говорить о величине проигрыша, поскольку часть денег, полученных от реализации лотерейных билетов, идет на оплату распространителей этих билетов и рекламу, другая часть — прибыль организаторов, поэтому на призы идет половина, а то и треть суммы, полученной организаторами лотереи. Поэтому, если услышите: «Покупайте билеты лотереи «Удача»! Каждый второй билет выигрывает!», то будьте уверены, что почти все выигрыши этой лотереи — билеты этой же лотереи.

БЕСКОНЕЧНОСТЬ

Понятие бесконечности появилось далеко не сразу. Долгое время казалось, что существует некое самое большое число, дальше которого уже считать невозможно. Конец этому представлению положил великий Архимед, в своей книге «Псаммит» («О числе песчинок») показавший, как с помощью существовавшей тогда системы счисления (?) выражать все большие и большие числа. Итак, ряд натуральных чисел — 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... — оказался бесконечным. Сразу возникло множество вопросов: что будет, если очень малое число сложить само с собой бесконечное число раз? Бесконечно ли число атомов во Вселенной? А число точек на отрезке?

Оказалось, что у бесконечного количества есть свойство, которого нет у обычных чисел. Например, каких чисел больше: натуральных или четных? На первый взгляд, четных чисел должно быть меньше, ведь есть еще и нечетные! Ан нет: напишем под каждым натуральным числом четное:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26

Получается, что их поровну, ни верхний ряд, ни нижний не «вырываются вперед». Мы пересчитали все четные числа с помощью натуральных... Итак, оказалось, что часть может быть равна целому. А раз так, в бесконечную гостиницу, заселенную бесконечным числом приезжих, можно разместить еще столько же гостей: всех прежних жильцов переселить в четные номера, а вновь прибывших — в нечетные, и места всем хватит... (Об этом есть замечательный фантастический рассказ, написанный Н. Виленкиным по мотивам «Звездных дневников Йона Тихого» С. Лема. Найдите и прочитайте и то и другое — вы получите большое удовольствие!)

Мало того, оказалось, что всех рациональных чисел — т.е. тех, которые можно представить несократимыми обыкновенными дробями, — столько же, сколько натуральных, хотя натуральные числа — лишь часть всех рациональных! Итак, часть бесконечного может быть равна целому; а всякую ли бес-

конечность можно пересчитать так, как мы это сделали с четными числами? Оказалось, не всякую! Невозможно пересчитать точки на отрезке, действительные числа (выражающиеся всеми конечными и бесконечными десятичными дробями), даже все действительные числа от 0 до 1. Стали говорить, что их количество несчетно. Замечательный пример несчетного множества точек построил великий немецкий математик Георг Кантор. Он взял отрезок, разделил его на три части,выбросил середину; затем с оставшимися отрезочками проделал то же самое — разделил их на три части и выбросил середину; этот процесс, продолженный до бесконечности, должен привести к тому, что от отрезка останутся лишь отдельные точки, причем их, на первый взгляд, должно остаться совсем немного. Как бы не так! Оказалось, что оставшихся точек столько же, сколько их было на всем отрезке — несчетное количество. Но общая длина всех выкинутых отрезков равна длине исходного отрезка! Выходит, на отрезке есть компания точек, столь же многочисленная, как и все точки отрезка, и не занимающая на нем никакого места!

Что же касается числа атомов во Вселенной, оно хоть и огромно, но конечно. В природе бесконечности нет! А как же точки на отрезке? Но отрезок и точки — это абстракция, идеальный объект, которого на самом

деле тоже нет в природе. Бесконечность есть чисто математическое понятие, удобное обобщение, а не существующее в действительности явление.

Природа бесконечности занимала и продолжает занимать многих философов (они даже придумали термин «дурная бесконечность», видимо, совсем с этой бесконечностью измучившись). Математики же отнеслись к делу проще: раз бесконечность есть в математическом мире, ее надо изучать, а объяснения оставить философии.

ИСААК НЬЮТОН
(1643—1727)

Исаака Ньютона, великого английского ученого, математики считают математиком, физики — физиком, а астрономы — астрономом.

Родился он в местечке Вулсторп, около города Грантема, расположенного в центре Британии, в семье небогатого фермера. Уже в детстве Исаак любил строить сложные механические игрушки, модели различных машин, солнечные и водяные часы, воздушных змеев.

В то же время мальчик увлекался решением сложных математических задач. Это увлечение склонило родственников Ньютона к мысли дать ему университетское образо-

вание. В 1661 году Ньютон поступает в Кембриджский университет, в престижный Тринити-колледж (нечто вроде факультета). Он был принят в качестве субсайзера — так называли студентов из бедных семей, которые помимо учебы выполняли обязанности слуг для преподавателей колледжа.

Учителем Ньютона в Кембридже, оказавшим на него наибольшее влияние, был Исаак Барроу, молодой профессор, заведующий кафедрой. Он был священником, занимался вопросами богословия, но подходил к ним с математической точки зрения. В дальнейшим Барроу оставил науку, уехал в Лондон и стал придворным проповедником.

В сохранившихся документах Тринити-колледжа отмечена аккуратность студента И.Ньютона. В 1664 году он становится «действительным студентом», в начале 1668 года получает степень магистра, или «мастера искусств». Еще через год он становится заведующим кафедрой, сменив И.Барроу.



Ньютон И.

Основную часть своих открытий Ньютон совершил в течение двух лет по окончании Кембриджского университета. В то время в Англии сви-

репствовала эпидемия чумы — страшной болезни, от которой умирали тысячи людей. Чтобы избежать заражения, Ньютон уехал в родной Вулсторп, где погрузился в научную работу.

Занятия математикой привели Ньютона к созданию ее раздела, который называется сейчас высшей математикой. Придуманные им математические понятия и методы позволили изучать движение различных тел и механизмов, определять площади и объемы произвольных фигур и тел, благодаря чему техника получила возможность быстро развиваться.

Огромный вклад внес Ньютон и в теоретическую физику. Общеизвестна история про яблоко, «вбившее» в голову Ньютона идею гравитации.

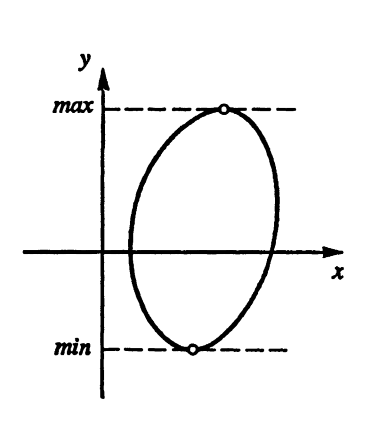
Всю свою дальнейшую жизнь Ньютон приводил в порядок и публиковал открытия, сделанные им с 1665 по 1667 годы в Вулсторпе. Много лет он преподавал в Кембриджском университете. Затем был назначен директором Монетного двора, где провел несколько важных реформ, в частности, ввел насечку на ребре монеты. Последние 25 лет жизни Ньютон был президентом Лондонского королевского общества — английской Академии наук, где много сделал для развития науки.

ГОТФРИД ВИЛЬГЕЛЬМ ЛЕЙБНИЦ
(1646—1716)

К XVII веку в задачах механики то и дело возникали новые кривые линии. Открытие аналитической геометрии революционно расширило множество математических кривых. Необходимость строить касательные и вычислять площади требовала создания новых методов.

Возникла еще одна группа проблем: вычисление максимумов и минимумов переменных величин. Связь с задачей о касательных была очевидна для людей, знающих аналитическую геометрию: если зависимость между переменными x и y изобразить графиком, наибольшему и наименьшему значениям y соответствуют те точки кривой, в которых касательная горизонтальна (см. рис.).

Отдельные задачи, связанные с касательными и площадями, решили Кавальери, Ферма, Паскаль, Валлис, Барроу... Но лишь к исходу XVII века давно ожидаемые универсальные методы — дифференциальное и интегральное исчисления — были созданы. Их нашли независимо друг от друга



англичанин Ньютон (о нем мы рассказали в отдельной статье) и немец Лейбниц.



Лейбниц Г. В.

Готфрид Вильгельм Лейбниц родился в семье философа, профессора университета в городе Лейпциге. Став взрослым и получив университетское образование, Лейбниц поступил на дипломатическую службу. Поездки в Париж и Лондон дали ему возможность ознакомиться с идеями великих математиков Франции и Англии. В 1676 году Лейбниц завязал переписку с Ньютоном. К сожалению, она продолжалась только год и не привела к объединению усилий. Мы можем только гадать, по каким причинам Ньютон перестал отвечать на письма Лейбница.

Научное соперничество и взаимная неприязнь Ньютона и Лейбница породили вопрос, который много лет волновал историков и политиков: кто же все-таки был первооткрывателем? Вероятно, Ньютон придумал основные понятия дифференциального и интегрального исчислений чуть раньше — зато Лейбниц первым опубликовал свои результаты, и к тому же применил более удобную,

чем у Ньютона, систему обозначений. Эти обозначения математики используют уже более трехсот лет.

Лейбниц прославился не только как математик и философ, но и как организатор науки. При его активном участии началось издание первого научного журнала, а позже была создана Берлинская академия наук. А когда в Европу приезжал молодой русский царь Петр I, Лейбниц несколько раз встречался с ним, обсуждая план создания Академии наук в России.

УРАВНЕНИЯ

Записывать и решать уравнения начали арабы в первом тысячелетии нашей эры. До тех пор решение задач было исключительно арифметическим — из многих действий. В тот момент, когда появилась блестящая идея находить неизвестное, записав соотношения, которыми оно связано с известными величинами, и затем выразив это неизвестное из этих соотношений, родилась алгебра. Слово «алгебра» — арабского происхождения; великий ученый арабского мира Аль-Хорезми называл перенесение членов из одной части равенства в другую так, чтобы все они стали положительными, словом «аль-джебр» (восстановление), а словом «аль-мукабала» (противопоставление), исчезнувшим ныне из ма-

тематического языка, называлось приведение подобных членов, в результате которого в уравнении для каждой степени неизвестного остается только один положительный член.

В те времена не было еще общепринятых теперь обозначений переменных буквами, а действий — знаками. Уравнения записывались словами. Но и в такой «словесной форме» уравнения существенно облегчали жизнь. Арифметика (как и классическая геометрия) не знала общих подходов к решению задач, но для каждой новой задачи нужно было подбирать новое решение.

Применение уравнений упрощает решение задач; но самое замечательное то, что одним и тем же уравнением могут описываться совершенно разные ситуации. Научившись решать некоторый тип уравнений, можно тем самым справиться с целыми классами задач, описывающихся уравнениями этого типа.

ГАЛУА
(1811—1832)

1 июня 1832 года парижские газеты сообщили: «Вчера злосчастная дуэль отняла у науки юношу, который подавал большие надежды. Увы, его преждевременная известность связана только с политикой». Далее

следовало подробное описание дуэли. Газетчики ошиблись. В истории имя Галуа сохранилось не как имя одного из активных республиканцев, а встало в один ряд с именами самых выдающихся математиков. Хотя он прожил всего 20 лет, но его работы открыли новое направление в алгебре, позволили решить многие до тех пор неподдававшиеся решению задачи. В математике его имя увековечено названиями ее областей: группы Галуа, теория Галуа, поля Галуа.

Дорога Эвариста Галуа в математику была непростой. Он родился 26 октября 1811 года в городке Бур-ля-Рен, что в десяти километрах от Парижа. Его отец был мэром этого городка. В школе Эварист учился прилежно, учителя отмечали его способности и старательность. В октябре 1823 года Эварист уезжает из родительского дома в Париж, чтобы учиться в Королевском колледже Луи-ле-Гран. Там он серьезно изучает математику, причем не по школьным учебникам, а по сочинениям выдающихся математиков Лежандра и Лагранжа. Через год он поступает в специальный мате-



Галуа Э.

матический класс коллежа, который ведет талантливый педагог Шарль Ришар. Ришар помог своему ученику опубликовать его первые математические работы, убедил его послать сообщение в Академию Наук, где оно было рассмотрено и передано Пуансо и Коши для заключения. Но Коши потерял работу Галуа также, как ранее потерял работу Абеля.

Эварист дважды пытался поступить в Политехническую школу — лучшее высшее учебное заведение того времени, но проваливался на вступительных экзаменах. Он поступает в Нормальную школу, дав подписку, что обязуется прослужить шесть лет на государственной службе после окончания школы. В Нормальной школе Галуа написал несколько математических статей и представил их на соискание Большой математической премии Академии Наук. Но и здесь его ждала неудача. Его рукописи находились у непременного секретаря Академии, а тот вскоре умер. Руководство Академии не известило Галуа о судьбе его работ. Правда, частично они были опубликованы.

Годы учебы Галуа в Нормальной школе совпали с годами революционного движения во Франции. Эварист принимает в нем самое активное участие. Он дважды арестовывался и приговаривался к тюремному заключению. Его исключили из Нормальной школы. Математика и политика становятся двумя сто-

ронами его жизни. Свою главную математическую работу, которая обессмертила его имя, Эварист Галуа написал перед дуэлью. Она была найдена в его бумагах, лежавших на письменном столе.

АБЕЛЬ

В судьбах гениев искусства и науки есть общие черты. И те, и другие имеют полное право сказать: «Я памятник себе воздвиг нерукотворный...» И у тех, и у других жизнь часто бывает трудна и коротка.

На одной из площадей норвежской столицы стоит скульптура юноши, победившего двух чудовищ. «Абель» — написано на постаменте. В университетские курсы математики прочно вошли интегралы Абеля, признаки Абеля, тождество Абеля...



Абель Н. Х.

Нильс Хенрик с детства отличался слабыми легкими. И умер, когда ему было всего 27 лет. Его болезнь в России называли чахоткой, на Западе туберкулезом — а лечить его тогда не умели.

Но все-таки он многое успел в жизни. Успел выучить, кроме родного норвежского, еще датский, немецкий, французский языки. Успел написать несколько статей по математике, и часть из них опубликовать — правда, небольшую часть. И еще успел сполна познать, что такое бедность.

После смерти отца 18-летний Нильс Хенрик остался старшим мужчиной в семье. К тому моменту он был учеником выпускного класса школы и имел репутацию «несомненного математического гения». Но этого недостаточно для того чтобы в семье появились деньги, нужны решения общеизвестных математических проблем, нужна слава.

Вначале судьба как будто была благосклонна к юноше: ему удается вывести формулу решения алгебраического уравнения 5-й степени — то, что математики всего мира пытались и не могли сделать в течение двух предшествующих веков. Школьный учитель не видит ошибки в доказательстве, профессора местного университета — тоже! Однако, датский математик Деген осторожно советует проверить формулы на конкретных уравнениях, решения которых заранее известны. Ответы не сходятся...

Закончив школу в 1821 году, Абель поступает в университет, и те самые профессора, которые проверяли его первую работу, из собственных средств платят ему мизерную стипендию. Этого мало — Абелю приходится подрабатывать репетиторством.

Вскоре появляются первые публикации его математических результатов. Но кто в Европе станет читать сочинения, написанные на норвежском языке? И все-таки жизнь постепенно меняется к лучшему: в 1829 году, тщательно изучив работу Абеля по теории интегрирования, ведущие норвежские математики ходатайствуют о государственной поддержке молодого ученого и о его отправке за границу для продолжения образования.

В Дании мысли Абеля возвращаются к его первой неудаче. А может быть, общей формулы для решения уравнений пятой степени нет вообще? Год работы — и результат получен! Но выясняется, что незадолго до этого свое доказательство неразрешимости уже опубликовал итальянец Руффини...

Абель продолжает учиться и работать, знакомится с математиками Германии, Италии, Франции.

30 октября 1826 года его пригласили на заседание французской Академии Наук. Его новая работа «Мемуар об общих свойствах весьма широкого класса трансцендентных функций» была представлена академикам. Собрание поручило Огюсту Коши подготовить подробное заключение об этой работе. Выдающийся ученый в то же время был академическим чиновником в худшем смысле этого слова. Работа Абеля просто-напросто затерялась в его бумагах и была обнаружена лишь после смерти Абеля. В этой работе ниспровергалось «второе чудовище».

В мае 1827 года Абель, уже больной, вернулся в Осло. Целый год он пытается добиться постоянной работы и твердого заработка, но вакансий нет, а пособие мизерно. Лишь в марте 1828 года ему удалось устроиться на временную работу вместо уехавшего в Сибирь профессора.

Напряженный труд, изматывающее соперничество с немецким математиком Якоби, который занят теми же математическими проблемами, вконец подорвали здоровье Абеля. 6 апреля 1829 года его не стало.

СОФЬЯ ВАСИЛЬЕВНА КОВАЛЕВСКАЯ
(1850—1891)

Жизненный путь С.В.Ковалевской был гораздо труднее, чем у ее коллег-мужчин. И не потому, что она была менее талантлива — все учителя отмечали удивительную легкость, с которой Соня усваивала сложные научные понятия и решала трудоемкие задачи. Но по законам царской России XIX века наука считалась делом исключительно мужским.

Когда Соне исполнилось 8 лет, ее отец, начальник московского арсенала генерал В.В.Корвин—Круковский, был уволен в отставку, и семья переехала в загородное имение. Как ни удивительно, этот переезд самым серьезным образом повлиял на дальнейшую судьбу Сони.

К приезду барина все комнаты в доме были оклеены новыми обоями. Но на детскую обоев не хватило, и одна стена осталась оклеенной страницами книги петербургского математика М.В.Остроградского. Девочка проводила целые часы перед таинственной покрытой формулами стеной, пытаясь найти порядок, в котором страницы следовали друг за другом. Впоследствии 15-летняя Соня за одну зиму изучила весь курс дифференциального и интегрального исчисления — ведь формулы были ей уже знакомы.

Генерал любил свою младшую дочь, но к ее увлечению математикой относился неодобрительно. Софья использовала популярный в то время способ вырваться из-под родительской опеки — оформила фиктивный брак с ученым-биологом В.О.Ковалевским. В 1868 году супруги Ковалевские выехали в Германию, где Софья Васильевна могла продолжить образование — обучение в российских университетах было для нее недоступно.



Ковалевская С. В.

Вначале С.В.Ковалевская училась в

Гейдельберге — в одном из немногих университетов Германии, куда принимали женщин. Она предпочла бы учиться в Берлинском, где читал лекции крупнейший немецкий математик Карл Вейерштрасс, — но порядки в Берлине были столь же реакционны, как и в России. Ковалевская решилась на крайний шаг — обратилась непосредственно к Вейерштрассу с просьбой о частных уроках.

При первой встрече Вейерштрасс дал ей несколько трудных задач и предложил подумать над ними на досуге. Не исключено, что он рассчитывал таким образом отбить у молодой женщины странную охоту к математике. Но к его изумлению, ровно через неделю все задачи были безукоризненно решены!

За четыре года обучения у Вейерштрасса Ковалевская решила три принципиальных проблемы математического анализа. В 1874 году Геттингенский университет без защиты диссертации присудил ей степень доктора философии с высшей похвалой.

После этого Софья Васильевна возвращается в Петербург и почти на шесть лет оставляет занятия математикой. Теперь ее интересуют журналистика, общественная деятельность, семейные дела. Брак с В.О.Ковалевским из фиктивного становится фактическим, в 1878 году рождается дочь, Соня-младшая. В гостеприимном доме Ковалев-

ских бывают многие известные ученые и писатели — Менделеев, Боткин, Чебышев, Тургенев, Достоевский...

В 1883 году, после трагической смерти мужа, С.В.Ковалевская уезжает в Швецию, приняв предложение занять место профессора в Стокгольмском университете. В 1889 году по инициативе Чебышева ее избирают членом-корреспондентом Санкт-Петербургской Академии наук. Но и после этого ей не разрешают преподавать на родине.

В 1891 году Ковалевская умерла от простуды в Стокгольме.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Развитие математики можно разделить на два периода — до открытия дифференциального и интегрального исчислений Ньютоном и Лейбницем и последующее ее развитие. Это открытие было завершением работ многих математиков, начиная с Архимеда.

Рассмотрим вот такую бесконечную сумму: 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ..., в которой каждое следующее слагаемое вдвое меньше предыдущего. Чему равна эта сумма? Напрашивается ответ — бесконечности, потому что у нас бесконечно много слагаемых. Однако нетрудно показать, что правильнее считать ее равной 2. Почему? Чтобы понять это, возьмите отрезок длиной 2 дм и начните

откладывать на нем отрезки, соответствующие слагаемым в этой сумме. Первый отрезок займет половину всего вашего отрезка, второй — половину остатка, третий — половину нового остатка и так далее, каждому слагаемому найдется место на отрезке длиной 2 дм, а остаток каждый раз будет уменьшаться вдвое и стремиться к нулю.

Поэтому принято говорить, что если производить бесконечное сложение 1 + 1/2 + 1/4 + ..., то в пределе получим 2. Для ряда 1 — 1/2 + 1/4 — 1/8 + ... в пределе будет число 2/3, для ряда 1 – 1/2 + 1/3 — 1/4 + 1/5 — ... число 0,6931471..., а для ряда 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + ... этот предел равен бесконечности, хотя внешне этот ряд не сильно отличается от предыдущих.

Второй пример применения предельного перехода связан с понятием скорости. Скоростью тела называется отношение величины пройденного телом пути ко времени движения. Но при движении автомобиля или человека его скорость все время меняется, поэтому, чтобы получить скорость тела в данный момент, нужно найти предел отношения величины пройденного пути ко времени движения при уменьшении рассматриваемого промежутка времени. Заметим, что в этом случае и числитель и знаменатель стремятся к нулю. А чему равна дробь 0/0? Решение этого вопроса и привело к понятию дифференцирования, к понятиям производная и интеграл.

Третий пример предельного перехода связан с методом нахождения площадей фигур, которым пользовался Архимед, а затем Кавальери. Метод заключается в том, чтобы разрезать фигуру на тонкие полоски, которые можно считать прямоугольниками, а потом уменьшать дальше ширину этих полосок и найти предельное значение сумм таких прямоугольников при стремлении ширины полоски к нулю.

Главным достижением Ньютона и Лейбница было установление связи между второй и третьей задачами. Методы, разработанные этими учеными и их последователями позволили решать множество практических задач, стоящих перед инженерами и учеными многих специальностей. Эти методы были совсем другими по сравнению с ранее известными, поэтому-то этот раздел математики и стали называть «высшей математикой».

В дальнейшем появились новые области математических исследований, которые тоже продолжали называть этим термином, но потом этот термин стал применяться все реже и реже. Ту область математики, о которой мы рассказали, теперь принято называть «математическим анализом», хотя в некоторых вузах термином «высшая математика» называют читающийся там курс математики, чтобы отличить его от школьного курса, который называют «элементарной математикой».

АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛМОГОРОВ
(1903—1987)

В когорте великих ученых одни, как Декарт или Лобачевский, — авторы ярчайших идей, которые заставили по-новому взглянуть на самые традиционные понятия, другие, как Евклид, — универсалы, затронувшие в томах сочинений едва ли не все разделы своей науки и кое-что из смежных областей. Но величайшие — те, кому удается сочетать оба таланта: глубину генератора идей и широту энциклопедиста.

Колмогоров учился в Московском университете в начале двадцатых годов нынешнего века. Это было сложное время для нашей страны — но, вместе с тем, время бурного расцвета московской математической школы, которую основал академик Н.Н.Лузин. Андрей Николаевич был одним из самых выдающихся его учеников.



Лузин Н. Н.

В арсенал современной науки прочно вошло понятие «колмогоровской сложности» — числовой характеристики, которая велика для слу-



Колмогоров А. Н.

чайных, хаотических процессов, но мала для упорядоченных. Чтобы показать хотя бы часть достижений А.Н.Колмогорова, назовем его работы в области динамических систем, из которых следует, в частности, что наша Солнечная система является устойчивой и не распадется, если не произойдет внешних воздействий. Он сделал теорию вероятностей современной математической наукой. Этот список можно было бы далеко продолжить... Одно лишь перечисление областей математики, которым принадлежат другие достижения А.Н.Колмогорова, заняло бы не менее десятка строк.

В последние десятилетия жизни основной целью А.Н.Колмогорова стало воспитание юных математиков. В 70-е годы школьники учили математику по учебникам Колмогорова. Предметом особой гордости Андрея Николаевича стал знаменитый 18-й интернат в Москве, созданный для того, чтобы наиболее способные и заинтересованные школьники из небольших городов и поселков могли получить углубленное физико-математи-

ческое образование на столичном уровне. А.Н.Колмогоров возглавлял жюри многих математических олимпиад, долгие годы был заместителем главного редактора в физико-математическом журнале для школьников «Квант».

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Как-то в одном пруду жили караси. Жили не тужили, но вот половодьем занесло в пруд несколько щук и стали те лакомиться карасями. Поредело поголовье карасей, а щуки расплодились. Вот уже совсем мало осталось карасей, и щуки начали дохнуть с голоду. Почти все перемерли, а карасям снова вольготно, стало их прибавляться. Тут уже полегчало и щукам — стало чем поживиться. Стали и они снова плодиться и уменьшать поголовье карасей. Такая вот круговерть.

Живший неподалеку биолог наблюдал и записывал то, что происходило с рыбьим поголовьем в пруду. Как-то он решил нарисовать график происходящего. На координатной плоскости он наносил точки, у которых координата x равнялась количеству карасей, а координата y — числу щук. Когда он соединил точки для последовательных наблюдений, то увидел, что они расположились по кривой, похожей на окружность (рис. 1). Процесс в пруду «зациклился» — стал периодическим.

Циклическими являются многие процессы, например, движения маятника часов или мальчугана на качелях. Такие колебания

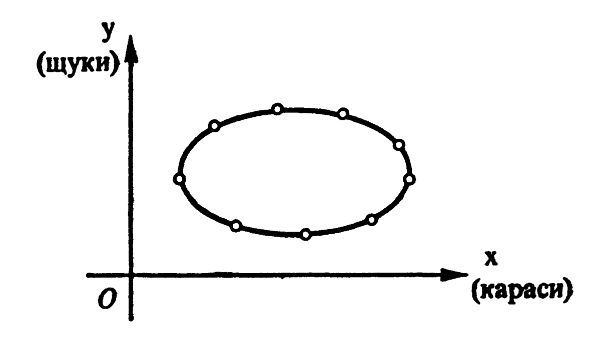


Рис. 1

также изобразятся замкнутыми кривыми на координатной плоскости, если в качестве координаты x рассматривать величину отклонения (углового), а в качестве координаты y — величину скорости (рис. 2).

В часах постоянство колебаний поддерживает механизм, связанный с пружиной,

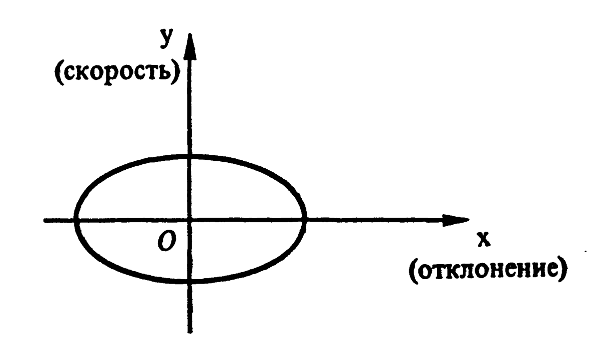


Рис. 2

а на качелях — движения мальчика, согласованные с движением качелей.

Циклическими являются и движения всяких моторов. Первым мотором была паровая машина. Изобретатель первой универсальной паровой машины Джеймс Уатт придумал для нее регулятор, чтобы обеспечить равномерную работу машины даже при неравномерном нагреве пара. Регулятор состоит из шарнирного параллелограмма (рис. 3) (он называется параллелограммом Уатта). Одна вершина параллелограмма закреплена на вра-

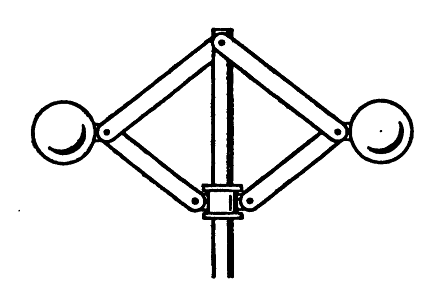


Рис. 3

щающейся оси, вторая может скользить по этой оси, а в двух других находятся массивные шары.

Нижняя вершина параллелограмма связана с заслонкой, регулирующей количество пара, поступающего в цилиндры машины, а ось регулятора вращается от вала машины. Если машина начинает работать быстрее, то быстрее начнет вращаться ось регулятора и

шары начнут подниматься. Такой эффект вы сами наблюдали, когда раскручивали камень, привязанный к веревке.

Подъем шаров вызывает подъем нижней вершины параллелограмма и последующее уменьшение подачи пара в машину. А если машина начнет работать медленнее, то регулятор таким же образом увеличивает подачу пара в цилиндры, что увеличивает скорость работы машины.

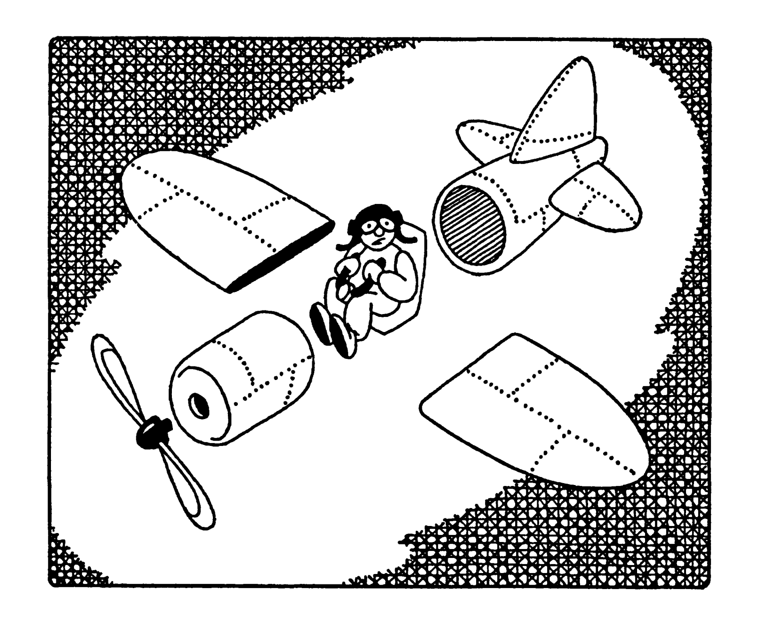
Однако со временем, когда стали изготавливать все более мощные машины, обнаружилось, что иногда регуляторы начинали бешено «дрыгаться», приводя к столь же неустойчивой работе машины. Инженеры обратили внимание математиков на эту проблему. Исследования математиков помогли избавиться от этой и многих других неприятностей, связанных с проектированием машин. Возникшая наука носит название «Теория динамических систем». Динамическими системами являются и качели, и паровая машина, и поголовье рыб в пруду, и система «Солнце—планеты», в которой планеты циклически вращаются вокруг Солнца, а спутники вокруг своих планет.

Ученые давно задумывались о том, устойчива ли Солнечная система? Не может ли она распасться с течением времени. Не так давно российские ученые А.Н.Колмогоров и его ученик В.И.Арнольд доказали, что эти опасения напрасны — наша система устойчива.

МСТИСЛАВ ВСЕВОЛОДОВИЧ КЕЛДЫШ
(1911—1978)

...Самолеты, разогнавшись до критической скорости, разваливались в воздухе. Разваливались быстро, за несколько секунд, — и никто из конструкторов не мог понять, откуда возникает смертельная для машины вибрация. У бдительных чекистов, стоявших за спинами проектировщиков и испытателей, был готов ответ: враги народа подрывают обороноспособность страны! Но ведь то же самое происходило и с американскими, английскими, немецкими самолетами...

Значит, дело не в том, что где-то неточно изготовили деталь или в какой-то формуле написали плюс вместо минуса. Конструкто-





Келдыш М. В.

ры новой техники столкнулись с флаттером — грозным явлением, для описания которого не годился ни один известный математический метод. Требовалось срочно создать новую математическую модель колебания авиаконструкций.

Эту модель придумал в 1940 году М.В.Келдыш — московский математик, с юности влюбленный в авиацию. В двадцатые годы он окончил МГУ, где учился, как и многие другие, у Н.Н.Лузина. Знаменитый профессор ценил талант Келдыша, но его весьма огорчало, что ученик намерен посвятить себя не абстрактной, а прикладной математике.

А ведь не будь открытия Келдыша, обеспечившего рывок советского авиастроения — и судьба Великой Отечественной войны могла бы сложиться по-другому...

В годы войны перед Келдышем и его сотрудниками встала новая сложная задача. При посадке самолета передняя стойка шасси начинала вихлять — то чуть вправо, то чуть влево. В результате самолет съезжал с посадочной полосы и терпел аварию. Американцы

окрестили это явление «шимми» — так назывался модный в то время танец.

И снова — вредные колебания. И снова существующего математического аппарата не хватает. Долгие месяцы ночных размышлений, расчетов, экспериментов... К концу войны и эта задача была решена. С 1946 года академик Келдыш занимается ракетной техникой и ядерной энергетикой, разрабатывает математические модели для С.П.Королева и И.В.Курчатова. В этой работе Келдыш показал себя талантливейшим организатором, способным мобилизовать многочисленные коллективы ученых на решение сложных и срочных проблем. В конце 50-х всю свою энергию Мстислав Всеволодович отдавал зарождающейся космонавтике. 12 апреля 1961 года Келдыш и Королев были на Байконуре рядом с Юрием Гагариным.

С 1961 по 1975 год М.В.Келдыш был президентом Академии наук. Основанный им Институт прикладной математики и сейчас остается одним из крупнейших математических центров в России и заслуженно носит имя М.В.Келдыша.

НЕВИДИМЫЕ РЕЛЬСЫ

Представьте себе, что над Москвой висит летающая тарелка, экипаж которой получил задание: сфотографировать городскую трамвайную сеть. Однако, по каким-то инопла-

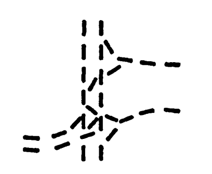


Рис. 1

нетным причинам фотографы не могут снять на пленку ни рельсы, ни провода. Единственное, что им доступно — это трамваи, которые на снимках будут выглядеть маленькими черточками.

Легко сообразить, что инопланетяне проторчат над городом довольно долго, изведут уйму фотопленки, но работу в конце концов выполнят. Зафиксировав достаточное число трамваев-черточек в разных положениях, они разберутся, как проходят рельсы, и где находятся стрелки (рис. 1).

А что, если высота велика, и трамваи выглядят не черточками, а точками? В этом случае, пожалуй, удастся справиться с фотографированием переулков и площадей, но возникнут проблемы с трамвайными парками: путей так много, пригнаны они друг к другу плотно, в какую точку ни ткни — обязательно попадешь на путь. Тут уж без трамваев-черточек не обойтись никак (рис. 2).

А теперь рассмотрим ситуацию, на первый взгляд, совершенно не «трамвайную»: по пустынной поверхности Луны движется робот (или несколько одинаковых роботов). Робот непрерывно анализирует состояние грунта под собой, и в зависимости от этого

(и ни от чего другого) определяет направление и величину своей скорости. Таким образом, если двум роботам случится в разное время попасть в одну и ту же точку лунной поверхности, они обязательно пройдут ее с одной и той же скоростью. Однако, скорость каждого робота будет плавно меняться от точки к точке.

Казалось бы, какие рельсы на Луне? Там даже каналов нет, как на Марсе. Но картинки можно рисовать так же, как и в трамвайном примере — даже если считать роботов не вытянутыми, а круглыми. Потому что дело не в форме роботов, а в их скорости.

В самом деле, существует закон, который для каждой точки лунной поверхности однозначно указывает направление, в котором может двигаться робот, проходящий через эту точку (такой закон называется дифференциальным уравнением). Зная этот закон, мы можем «сфотографировать» направления скорости в различных точках, и получить портрет динамической системы, по виду схожий с портретом трамвайного парка (рис. 3).

Более того, невидимые рельсы тоже есть! В прошлом веке французский математик Огюстен

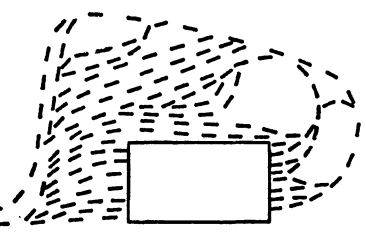


Рис. 2



Рис. 3

Коши доказал, что уравнение, связывающее положение объекта с его скоростью, удерживает движущийся объект на строго определенном маршруте так же жестко, как колея — трамвайные вагоны! Теорема Коши — выдающееся открытие не только математики, но и вообще естествознания. Ведь динамические системы встречаются везде. И очень часто ученые, которые их исследуют, оказываются в положении нашего инопланетянина: законы и направления движения во всех точках им известны, а сами пути — неведомы.

АНРИ ПУАНКАРЕ
(1854—1912)

Конец девятнадцатого и начало двадцатого века... Время бурного развития техники, когда электричество стремительно входило в повседневную жизнь, вытесняя газовые фонари и паровые двигатели. Время переосмысления важнейших концепций физики, открытия явлений, принципиально меняющих картину мира. Время социальных потрясений, громких политических скандалов, время ожидания

большой войны между странами Европы, и прежде всего между Францией и Германией. Время, когда будущее представлялось ошеломляюще непохожим на настоящее — и далеко не безоблачным.



Пуанкаре А.

«Романист должен читать только научные книги, — размышлял французский писатель Мопассан, — потому что если он умеет понимать, то узнает из них, что с ним станется через сто лет, какие будут тогда у людей мысли и чувства».

В 1881 году общественное мнение Франции взбудоражили статьи двадцатисемилетнего профессора Каннского университета, в которых был описан новый класс замечательных во многих отношениях функций. Математики увидели в этих работах мастерское обобщение классических идей Абеля, а также недавних работ немецкого ученого Фукса. Нематематики упрекали автора, Анри Пуанкаре, в недостатке национального достоинства — новые функции были названы фуксовыми.

Чтобы понять причины такой странной реакции на математический термин, нужно вспомнить, что за десять лет до этого Франция

бездарно проиграла Германии войну и вынуждена была отдать две своих провинции Эльзас и Лотарингию. Антинемецкие настроения с тех пор были чрезвычайно сильны. И вдруг француз называет что-то в честь немца?!

Пуанкаре твердо стоял на своем. Политика его не интересовала. Но его французские критики получили поддержку с совершенно неожиданной стороны: ведущий немецкий математик Клейн, занимавшийся теми же проблемами, что Фукс и Пуанкаре, предложил называть новые функции автоморфными. Это название и закрепилось в научной литературе.

Фуксовы функции принесли Пуанкаре широкую известность. Его приглашают работать в столицу, и он начинает преподавать математику в Сорбонне — так называется парижский университет.

Пуанкаре занимается задачами теории дифференциальных уравнений. Его интересует вопрос: что произойдет, если немножко переложить «невидимые рельсы»? Может ли это привести к принципиальным изменениям картинок? И находит ответ: не может, если исходная картинка не содержит особых точек — точек, в которых нарушается «гладкость» этих рельсов.

Успехи в теории дифференциальных уравнений побудили Пуанкаре взяться за одну из сложных задач небесной механики, которая называется задачей трех тел. Движение космических объектов под действием сил

гравитации описывается ньютоновским законом всемирного тяготения, который связывает положения движущихся объектов с их ускорениями, т.е. скоростями изменения скоростей. Если рассмотреть только два космических тела, пренебрегая воздействием всех остальных, то дифференциальные уравнения могут быть решены точно. Но добавление третьего тела усложняет уравнения настолько, что поиск точного решения становится безнадежным: решение есть, а найти его нельзя! Задачу приходилось решать приближенно, и как раз в разработке приближенных методов ее решения сыграл значительную роль Пуанкаре. Его работа была удостоена премии норвежского короля Оскара II в 1889 году.

Методы исследования дифференциальных уравнений, которые разработал Пуанкаре, привели его к необходимости изучать наиболее общие геометрические свойства и соотношения — настолько общие, что они не меняются даже при сильных непрерывных деформациях (как, например, свойство тела состоять из одного куска). В работах 90-х годов Пуанкаре создал новую ветвь математики — **топологию.**

Открытия физиков, такие как радиоактивность и постоянство скорости света, не оставили Пуанкаре безучастным. Новые явления требовали описания на новом математическом языке. Пуанкаре занялся его разработкой. Он помог физикам — и одно-

временно крайне озадачил их. Его глубокие математические теоремы не поддавались физическому истолкованию, а порой и вовсе противоречили здравому смыслу. Например, получалось, что размеры движущегося тела сокращаются, а часы, установленные на нем, замедляют ход. Проверить это в эксперименте было невозможно — требовались скорости, измеряемые тысячами километров в секунду. В мире заговорили о «кризисе физики»...

И тем не менее новую картину мира, скрытую в трудах Пуанкаре, а также в работах голландского физика Лоренца и немецкого математика Минковского, нужно было изложить на физическом языке, без пробелов и противоречий. Это было сделано в 1905 году Альбертом Эйнштейном. Его и называют обычно автором теории относительности, хотя, справедливости ради, следовало бы добавлять еще трех соавторов, названных выше.

В 1912 году Пуанкаре приходит в голову новая теорема, связанная с задачей трех тел. Пуанкаре убежден в ее правильности, но у него не хватает времени, чтобы заняться аккуратным доказательством. У математиков не принято публиковать недоказанные результаты. Но 58-летний Пуанкаре почему-то решается на это. Статья увидела свет в ноябре — через три с половиной месяца после неожиданно и скоропостежной смерти автора.

Несколько лет спустя последняя теорема Пуанкаре была доказана американцем Биркгофом.

ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЕВ
(1821—1894)

Фамилия этого человека в разных случаях произносится и пишется по-разному. Сам Пафнутий Львович писал ее через «о»: Чебышов, но почему-то более распространенным стал вариант с ударением на первом слоге: Чебышев.

Крупнейший русский математик и механик середины XIX века родился в селе Окатово Калужской губернии в дворянской семье. В 1837 году Чебышев поступил в Московский университет и через четыре года с отличием окончил его. В 1847 году ученый переехал в Санкт-Петербург и более тридцати лет работал в университете города на Неве.

В XIX веке среди математиков стало возникать разделение труда. Одни занимались преимущественно теорией, углубляли ее, распутывали логические головоломки, оставленные учеными прошлых веков. Другие стремились приспособить известные математические приемы для решения задач техники и управления. Между чистыми математиками и прикладниками не было четкой границы, как нет ее и сейчас. Нередко для решения технической проблемы приходилось вводить новые математические понятия, доказывать сложные теоремы.

Именно в таком стиле работал П.Л.Чебышев. Практические задачи приводили его к теории приближений и геометрии, меха-



Чебышев П. Л.

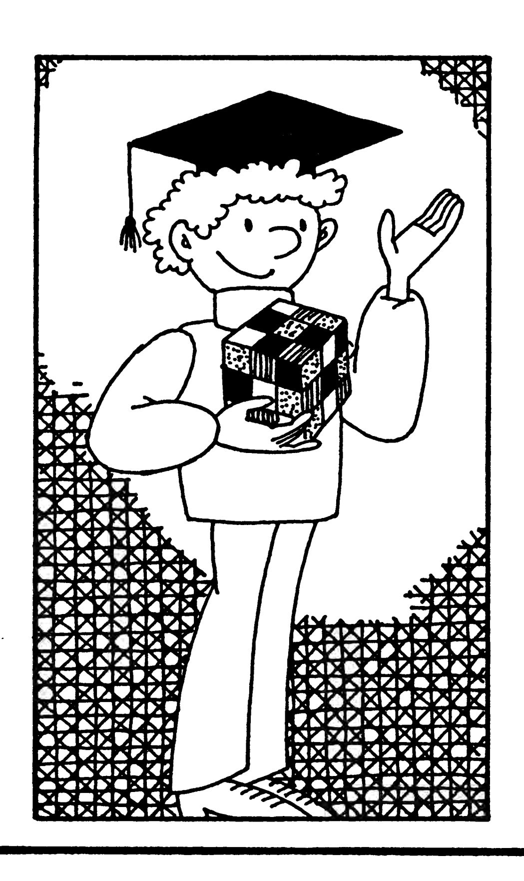
нике и теории вероятностей. Чебышев рассчитал и сконструировал механическую счетную машинку (арифмометр), четырехногий шагающий механизм, имитирующий движения животного, и другие удивительные устройства. Помимо прикладных разработок, Чебышев исследовал задачу о частоте появления простых чисел в натуральном ряду.

В 1859 году Пафнутий Львович был избран академиком Санкт-Петербургской академии наук.

Немало сил и времени потратил Чебышев на преподавательскую работу, на руководство исследованиями молодых математиков. В числе его учеников — будущие академики, математики с мировыми именами А.М.Ляпунов и А.А.Марков.

В 1944 году была учреждена премия им. П.Л.Чебышева за лучшие исследования в области математики и теории механизмов и машин.

ФИГУРЫ



ЕВКЛИД И ЕГО «НАЧАЛА»

Математические знания накапливались в Греции и греческих колониях в течение нескольких столетий. Постепенно стало ясно: нельзя логическим путем вывести нечто из ничего. Нужно зафиксировать первоначальные понятия и некоторые факты, из которых можно вывести все остальное. В геометрии они назывались **постулатами**, а в арифметике — **аксиомами**.

Но какие факты считать первоначальными? Ведь многие утверждения следуют друг из друга. Рано или поздно должен был появиться мыслитель, способный навести в математическом хозяйстве хотя бы видимость порядка.

И такой мыслитель появился в третьем веке до н.э. в Александрии. Это был **Евклид**.



Евклид

Точных сведений о его биографии не сохранилось. Возможно, это связано с царской немило-

стью — согласно легенде, ученый был дерзок с владыкой Александрии и всего Египта, царем Птолемеем. Когда монарх начал изучать геометрию, у него возникли трудности. Не привыкший встречать затруднения, царь вызвал Евклида и спросил, нет ли какого-то особого, доступного лишь правителям способа усвоить эту науку. Евклид ответил: «Царской дороги в математике нет».

Сам Евклид доказал не так уж много новых теорем — хотя, разумеется, были и они. Но не в этом его главная заслуга. Мы благодарны Евклиду прежде всего за то, что он переработал и по-новому осмыслил уже известные результаты, показав другим пример того, как это можно и нужно делать.

Впрочем, математики, сравнимые по значению с Евклидом, появились нескоро — спустя два тысячелетия! В течение многих веков математикам казалось, что 13-томный труд Евклида нельзя улучшить — можно только дополнить новыми открытиями.

Труд этот называется «Начала». В нем была изложена вся известная к тому времени геометрия (за исключением теории конических сечений), а также связанная с геометрией теория чисел. К исходным утверждениям Евклид отнес пять постулатов, обосновывающих выполнимость тех или иных геометрических построений (например: «Через две точки можно провести прямую») и

восемь аксиом, описывающих основные свойства равенств и неравенств (например: «Целое больше части»).

Аксиоматический метод со временем вошел во многие науки, причем не только естественные. Великий голландский философ Спиноза, например, аксиоматизировал этику.

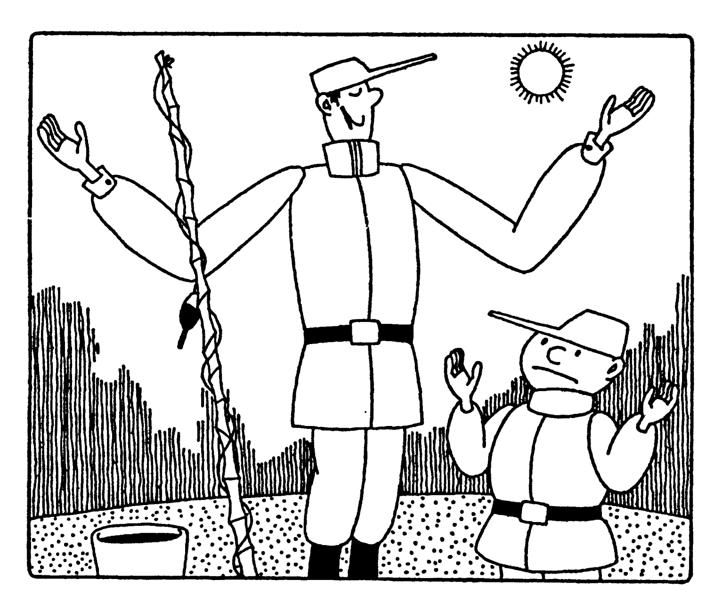
Дальнейшая судьба «Начал», несмотря на всю их образцовость, сложилась непросто. Средневековые фанатики — и христиане, и мусульмане — безжалостно уничтожали древние рукописи, действуя по принципу: «Если они противоречат нашим священным книгам, то они вредны; а если нет, то они ни к чему». И все-таки, в латинских и арабских переводах, «Начала» выжили, и их по достоинству оценили математики нового времени. Величайший ученый XVII века Исаак Ньютон, следуя Евклиду, назвал свою главную книгу «Начала натуральной философии». Да и в двадцатом веке ваши дедушки и бабушки еще знакомились с геометрией по учебнику, изложение материала в котором следовало евклидовым «Началам».

ДЛИНА

Длина — одно из первых геометрических понятий, введенных человеком. Первые меры длины были самыми естественными и

поэтому сохранились и по сей день. Действительно, в газетах можно прочесть такие фразы: «Избушка находилась от поселка на расстоянии двух дневных переходов», «Трещина шириной в ладонь пересекала каменную плиту».

Но насколько удобными были изначальные меры длины — локоть, вершок (ширина ладони на уровне пальцев), сажень (расстояние между концами пальцев разведенных



в стороны рук) — ведь они всегда при себе, настолько они были неточными, ведь у разных людей эти единицы различны. Государствам приходилось вводить эталоны длины — образцовые единицы измерения. Но в разных странах эти единицы оказывались

разными. Так, три русских локтя составляли два персидских. Персидские же получили на Руси название **аршин** (от «арш» — локоть в группе тюркских языков).

Естественно, что соотношения между различными единицами длины даже в одной стране были довольно причудливы. Указ Петра I, призванный упорядочить систему мер в России, вводил следующие, довольно сложные соотношения между бытовавшими в то время единицами: 1 миля = 7 верст = 3500 саженей = 10500 аршин = 168000 вершков = 294000 дюймов = 2 940 000 линий = 29 400 000 точек.

Заметим, что в последних соотношениях прослеживается идея десятичной системы мер. Но привычные меры настолько трудно искоренимы, что для введения новых требуется революция, притом Великая, как Великая французская революция, в результате которой во Франции появились метр, километр, сантиметр, дециметр, миллиметр... и Великая Октябрьская социалистическая революция, после которой эти единицы были введены у нас. А США, Великобритания и многие другие страны обходятся еще средневековыми мерами.

Понятие длины отрезка сыграло огромную роль в становлении математики. Ведь, собственно, что такое длина отрезка? Это — число, которое указывает, сколько раз укладывается на этом отрезке выбранная еди-

ница длины. Если этот эталон не помещается целое число раз, то приходится вводить дробную длину.

Еще древние греки знали, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, т.е. не может быть выражена через его сторону в виде обыкновенной дроби. В результате появились **иррациональные числа**. Таким образом оказались связанными алгебра и геометрия.

Еще сильнее связал их французский математик **Рене Декарт**, создавший аналитическую геометрию на основе прямоугольной системы координат. В результате любую геометрическую задачу можно сформулировать как алгебраическую. Вспомним теорему Пифагора — квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов. Этот замечательный факт получил массу обобщений как в геометрии, так и в алгебре, и в теории чисел.

Стремление научиться измерять длины дуг кривых привело к целому ряду открытий. Длину окружности научились измерять еще древние, приближая ее ломаными, хотя вопрос о природе **числа** π мучил математиков сотни лет и был решен лишь в прошлом веке. Подход к определению понятия длины кривой — тот же, что и для определения окружности. Правда, здесь при приближении дуги ломаной необходима осторожность. Рассмотрим, например, диагональ квадрата

и будем приближать ее ступенчатыми ломаными. Все они имеют одинаковую длину, равную удвоенной длине стороны квадрата, в пределе такая ломаная стремится к диагонали, но длина диагонали равна длине стороны, умноженной на корень из двух. Такое рассуждение, «доказывающее», что корень квадратный из двух равен двум, называют софизмом. Говоря о длине, нельзя не сказать об инструментах, с помощью которых длина измеряется. В первую очередь — это линейка с делениями, которая, как правило, лежит у каждого из вас в портфеле. На ней отмечены сантиметры и миллиметры. Таким образом, с ее помощью можно измерять расстояния с точностью до 1 мм. Придуманы инструменты и для более точного измерения расстояний. Широко распространенный прибор микрометр может измерять размеры с точностью до одного микрона — тысячной доли миллиметра.

Когда мы говорим о протяженности пути между двумя пунктами, то не всегда километры являются лучшей единицей. Для пассажиров важнее знать не километраж, а время пути, и мы измеряем расстояние часами лета на самолете, езды на автобусе или в поезде. Таким образом, мы вводим другую «метрику» для пунктов на Земле, в которой расстояние от Москвы до Углича может оказаться больше, чем от Москвы до Марселя. У владельцев автомобиля своя «метрика».

Что их объединяет? Во-первых, то, что все расстояния неотрицательны, во-вторых, что расстояние от А до В равно расстоянию от В до А, а в-третьих, то, что сумма расстояний между пунктами А и В и пунктами В и С не меньше расстояния между пунктами А и С (аксиома треугольника). Еще одно свойство: если расстояние между двумя пунктами равно нулю, то это — один и тот же пункт. Так мы пришли к важному в современной математике понятию метрического пространства. Таким пространством может быть не только глобус, где расстояния можно измерять ниткой, но и такие абстрактные пространства, как множество функций, заданных на отрезке. Такой геометрический подход оказался чрезвычайно плодотворным и способствовал решению многих задач, выдвигавшихся перед математиками со стороны физиков, химиков, инженеров, экономистов и др.

ЭРАТОСФЕН

Греческий математик из северной Африки... В этих словах нет никакого противоречия. В четвертом веке до н.э. Александр из Македонии — области на севере древней Греции — объединил под своей властью многие страны южной Европы, западной Азии и северной Африки. После смерти тридца-

титрехлетнего Александра его империя распалась на несколько самостоятельных государств, но развитие науки и культуры происходило в них по греческим традициям.

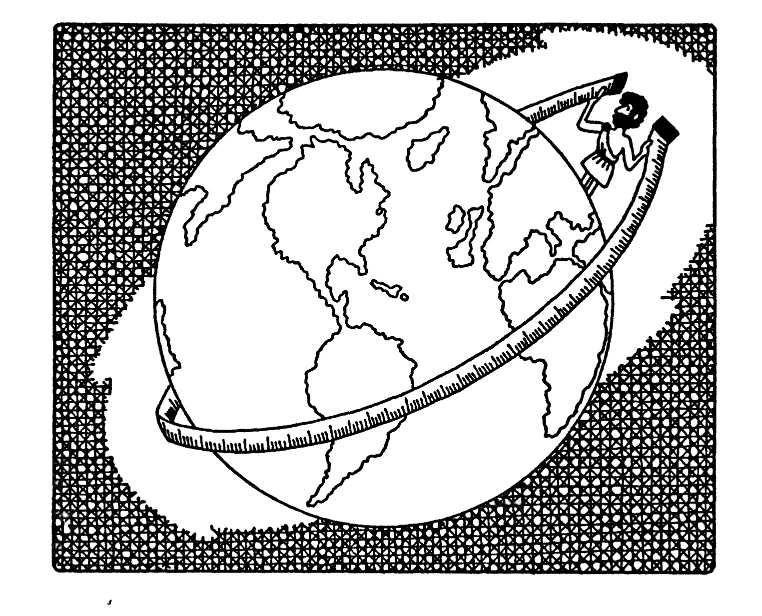
В 276 году до н.э. в городе Кирене родился мальчик, которого назвали Эратосфеном. О его детстве и юности мы знаем немного. Известно, что он учился в крупнейшем египетском городе Александрии (не исключено, что его учителем был Евклид), а затем в Афинах.

Эратосфен стал одним из образованнейших людей своего времени. Кроме познаний в математике и астрономии, он глубоко изучил историю и философию, овладел искусством писать стихи, известны его исследования музыки. С сорока лет и до глубокой старости Эратосфен заведовал уникальной Александрийской библиотекой.

Наиболее известным достижением Эратосфена стало его «решето» для отсеивания простых чисел. Но здесь мы расскажем о другом поразительном открытии ученого — измерении радиуса Земли.

В то время уже была общепризнанной гипотеза о шарообразности Земли. Но вычислить радиус этого шарика казалось невозможным — уж слишком велико было это число по сравнению с привычными для геометров размерами.

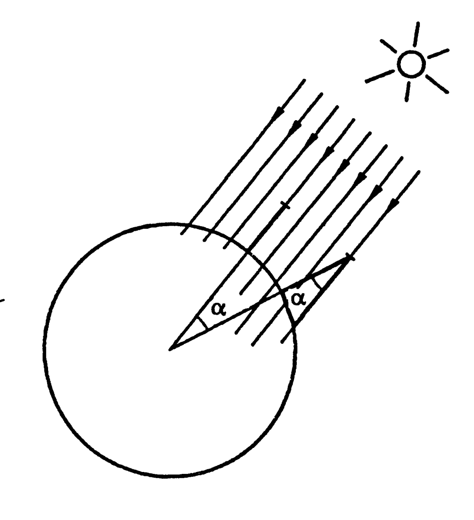
Эратосфен использовал астрономические наблюдения и геометрическую идею параллельности солнечных лучей. Он заметил, что



в день летнего солнцестояния в египетском городе Сиене (ныне Асуан) предметы не отбрасывают никакой тени. Между тем в Александрии стержень солнечных часов отбрасывает в полдень тень, по которой можно измерить наклон солнечных лучей.

Ученый изобразил на чертеже два радиуса земного шара, один из которых соединяет центр Земли с Сиеной, а другой с Александрией. Учитывая, что две параллельные прямые пересекают третью под одним и тем же углом, он заключил, что угол между радиусами в точности равен углу отклонения солнечного луча от вертикали, измеренному в Александрии. Этот угол составлял семь и одну пятую градуса.

Эратосфену была известна теорема о пропорциональности двух величин: угла с вершиной в центре окружности и дуги, высекаемой на окружности этим углом. Другими словами, измеренный угол был во столько



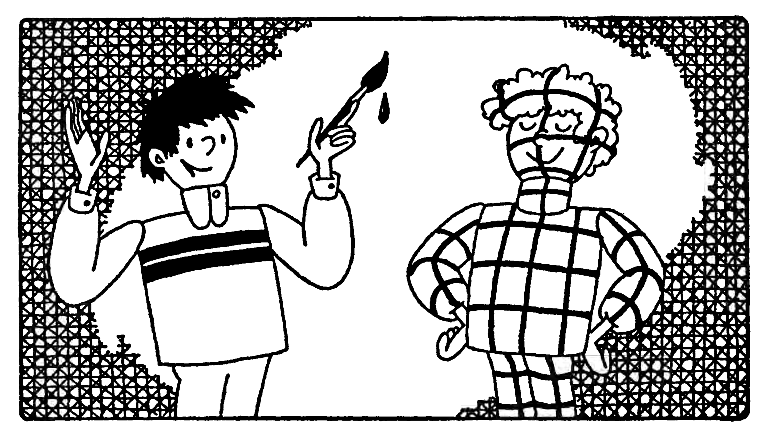
же раз меньше полного угла в 360 градусов, во сколько расстояние между Александрией и Сиеной было меньше окружности земного шара. Это отношение, по Эратосфену, равнялось 1/50. А дальше оставалась совсем простая операция — вычисление радиуса окружности по известной ее длине.

Решение Эратосфена содержит две неточности. Во-первых, он (может быть, даже не заметив этого) использовал предположение, что Сиена находится строго южнее Александрии, а не юго-восточнее или юго-западнее. Во-вторых, он оценивал расстояние между городами по тому времени, которое тратили на его преодоление царские гонцы, что было, конечно же, ненадежно. Поэтому ответ — в пересчете на современные меры длины он

составляет примерно 6300 км — был вычислен с ошибкой порядка 100 км. Но главная цель была достигнута — Эратосфен показал, что задача принципиально разрешима и продемонстрировал силу геометрии в астрономических расчетах.

ПЛОЩАДЬ

Мастер-плиточник — человек, который в процессе своей работы все время занимается измерением площадей. Покрыв стену плитками, он может легко определить площадь стены в плитках, пересчитав количество уложенных плиток. Но на самом деле он всегда решает обратную задачу: сначала измеряет



площадь стены, а потом вычисляет необходимое количество плиток. «Способ плиточника» оказывается полезным и при вычис-

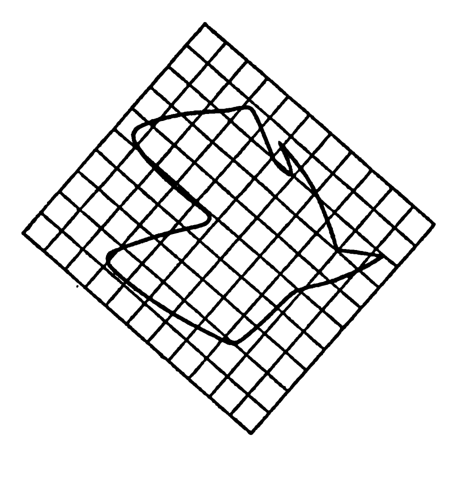


Рис. 1

лении площадей сложных фигур. Нанесем квадратную сетку на прозрачную бумагу и наложим ее на фигуру (см. рис. 1). Тогда ее площадь будет не меньше, чем количество квадратиков сетки, лежащих целиком внутри фигуры, умноженное на площадь одного квадратика, и не больше, чем количество клеток, имеющих общие точки с этой фигурой, также умноженного на площадь одной клетки. Такая сетка называется палеткой, а предложенный способ ее оценки лежит в основе современного понятия площади произвольной фигуры: площадью называют предел, к которому стремятся полученные

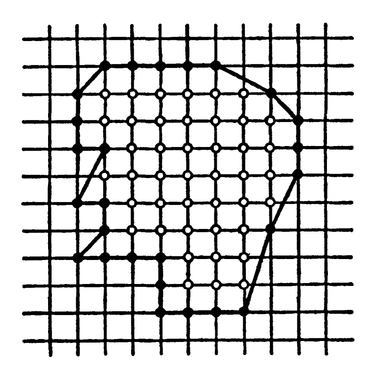


Рис. 2

величины, если брать палетки со все более мелкими клетками, в случае, если такой предел существует.

Любопытно, что площадь многоугольника, все вершины которого лежат в узлах квадратной сетки (см. рис.2), выражается довольно простой формулой:

$$S = n + m/2 - 1,$$

где n — количество узлов сетки, лежащих внутри многоугольника, а m — количество узлов сетки, лежащих на его границе (в частности, в вершинах). Она называется «формулой Пика». Конечно же, при вычислении площадей простейших геометрических фигур — многоугольников — палетка явно ни к чему. Но верные способы их нахождения были придуманы далеко не сразу. Так, древние вавилоняне считали, что площадь четырехугольника равна произведению полусумм противоположных сторон. Отсюда следует нелепое утверждение: если у двух ромбов равны стороны, то равны и площади. Лишь после открытия верной формулы для площади треугольника (а неверных было предостаточно) стало возможным вычислять площадь любого многоугольника, разделив его предварительно на треугольники. Конечно же, всякий многоугольник можно многими способами разрезать на треугольники. Ясно, что если два многоугольника так разрезаны на треугольники, что полученные на-

боры одинаковы, то площади этих многоугольников равны. Как ни удивительно, но верно и обратное утверждение: если два многоугольника равновелики, то они и равносоставлены, т.е. могут быть разрезаны на одинаковые наборы многоугольников (а значит, и треугольников). Получить такое разрезание не всегда просто. Попробуйте-ка разрезать на одинаковые части равносторонний треугольник и равновеликий ему квадрат! А для многогранников подобное утверждение уже неверно: нельзя, например разрезать на одинаковые части правильный тетраэдр и равновеликий ему куб.

С развитием науки и техники возникла острая потребность вычислять площади не только многоугольников, но и произвольных фигур. Первые шаги здесь сделали **Архимед** и итальянский монах XVII **Бонавентура Кавальери**, а окончательно решили эту проблему **И.Ньютон** и **Г.Лейбниц**, создавшие интегральное исчисление, частью которого является и вычисление площадей фигур, ограниченных заданными кривыми. На основе методов интегрирования были сконструированы разнообразные планиметры — приборы, с помощью которых можно измерять площадь фигуры, например, обводя границу этой фигуры специальным указателем. А как быть с площадями криволинейных поверхностей? Что понимать под площадью такой поверхности? В этом случае естественно рас-

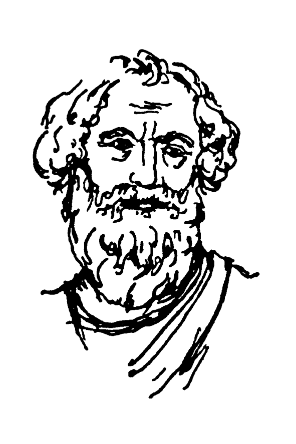
сматривать многогранную поверхность с вершинами в точках такой поверхности. Если рассмотреть такие многогранники со все более мелкими гранями, то предельная величина площади этих многогранных поверхностей и принимается за площадь данной криволинейной поверхности.

МАТЕМАТИК АРХИМЕД

(287—212 до н.э.)

В начале 80-х годов III века до н.э. — вероятнее всего, в 287-м году — в семье астронома Фидия появился сын. Отец был первым учителем маленького Архимеда, ставшего впоследствии величайшим механиком и математиком.

Молодость Архимеда прошла в его родном городе Сиракузы, на средиземноморском острове Сицилия. Уже став известным ученым, Архимед некоторое время жил в тогдашней столице наук — Александрии. Там он познакомился с другими крупнейшими математиками и позднее, вернувшись на Сици-



Архимед

лию, поддерживал с ними переписку. Одно из писем Архимеда к Эратосфену сохранилось до наших дней.

Третий век до нашей эры был золотым веком античной математики. В то время Средиземноморье сотрясали жестокие войны: александрийцы бились с селевкидами, Рим с Карфагеном... А математики — Евклид, Архимед, Эратосфен, Аполлоний — работали, достигая удивительных результатов.

Когда началась вторая пуническая война (пунийцами называли жителей Карфагена), сиракузский царь сначала поддержал римлян, а затем перешел на сторону Карфагена. Римские войска осадили Сиракузы. Но все попытки взять город штурмом оканчивались неудачей — настолько мощными оказались защитные устройства, сконструированные Архимедом.

В 212 году до н.э. ученый погиб во время римской атаки. Но и после его смерти Сиракузы продолжали успешно обороняться, используя его изобретения.

Современники в полной мере оценили Архимеда как военного инженера. Его достижения в чистой математике были не менее значительны.

Есть ли бесконечно большие и бесконечно малые числа? Архимед поставил точку в долгом споре: «Нет, — ответил он. — Всякое малое число, будучи сложено само с собой достаточное количество раз, превзойдет вся-

кое наперед заданное число». Этот принцип вошел в математику под названием аксиомы Архимеда.

Пользуясь этой аксиомой, Архимед доказал несколько замечательных геометрических соотношений. Среди них и то, которое он сам в письме к Эратосфену назвал главным своим открытием: объемы шара и описанного около него цилиндра относятся как 2:3.

Архимед установил, что число π больше $3\frac{10}{71}$, но меньше $3\frac{1}{7}$. Этот результат не уступает по точности той оценке, которую мы и сейчас нередко используем: $\pi \approx 3{,}14$ (убедитесь в этом, переведя обыкновенные дроби в десятичные).

Задачи, решенные Архимедом, сложны и красивы сами по себе. Но приемы, использованные для их решения, оказались еще более удивительными, чем ответы. Они послужили подсказкой ученым куда более поздней эпохи — первооткрывателям современного математического анализа.

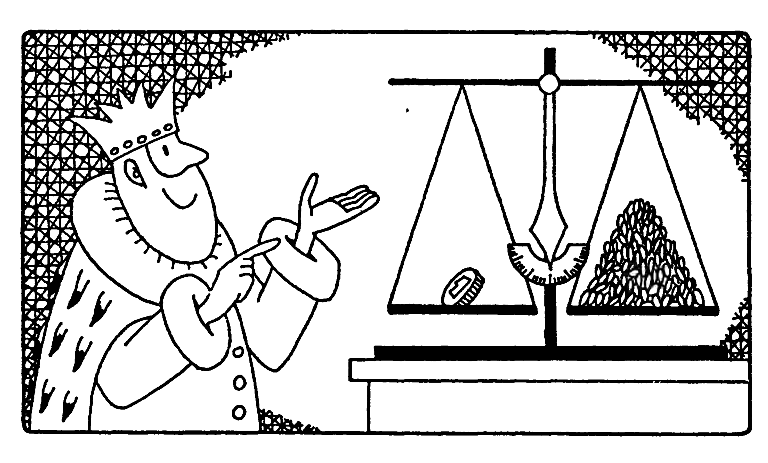
ОБЪЕМ

Измерение объемов с незапамятных времен вошло в человеческую практику. Уже в древнеегипетских папирусах содержатся правила определения вместимости житниц

египетских фараонов. С тех пор прошло три с половиной тысячелетия, на протяжении которых способы вычисления объемов непрерывно совершенствовались. Правда, математические и практические приемы измерения объемов частенько расходились.

Причиной такого расхождения явились разные подходы к понятию объема. Математики ставили своей задачей выразить объем тела через его линейные размеры, а торговцы удовлетворялись мерами, полученными из массы продукта. Любопытно, что в основу меры массы (а следовательно, и объема) у многих народов: индусов, египтян, итальянцев, англичан и других, — была положена масса ячменного или пшеничного зерна. Следующей единицей массы был фунт.

Наиболее показательными являются английские меры. В 1266 году английский король Генрих III своим указом определил, что



«с согласия всего английского государства, английский пенни, называемый стерлингом (самая мелкая монета), круглый и без обрезки, должен весить столько же, сколько 32 пшеничных зерна, взятых в середине колоса, 20 пенни должны составлять унцию, 12 унций — фунт». Нетрудно подсчитать, что здесь фунту соответствовало 7680 зерен. Так мы познакомились и с происхождением загадочной денежной единицы Великобритании — **фунтом стерлингов.** Стерлингом (вначале истерлингом — easterling — восточной монетой) называлась серебряная монета, которая чеканилась в восточных областях Германии. Мастера, изготовлявшие эту монету, были приглашены работать в Англию. Они и стали называть свои монеты стерлингами.

В Англии еще долго не существовало никакого соотношения между мерами длины и емкости. Лишь в 1701 году Вильгельм III Оранский издал указ, по которому бушель (сосуд для измерения объема) должен быть круглым, с плоским дном, ширина его должна быть повсюду $18\frac{1}{2}$ дюймов, а глубина — 8 дюймов.

В России применялись свои меры объема: **ведро** — 12 литров, **насадка** — 30 литров, **бочка** — 490 литров.

Конечно же, изготовлялись бочки разного объема и формы. Одна из самых замечательных математических работ, посвященных

вычислению объемов, была написана выдающимся немецким математиком и астрономом И.Кеплером. Поводом для ее написания явился случай, так описываемый самим Кеплером:

«Ко мне пришел продавец с измерительной линейкой, с помощью которой промерил подряд все мои бочки, не обращая внимания на форму, без всяких соображений и вычислений. Медная линейка просовывалась через наливное отверстие, расположенное в середине высоты бочки, до пятки деревянного круга, и продавец объявлял количество амфор, вмещаемых бочкой, заметив лишь число, поставленное на линейке в том месте, на котором оканчивалась длина. Я удивился, как это поперечная линия, проведенная через объем половины бочки, может служить указателем ее вместимости, и даже усомнился в правильности такого измерения. Когда же я узнал, что такое употребление поперечной линейки установлено здесь общественными властями и измерители ручаются за его правильность, то я счел для себя подходя-

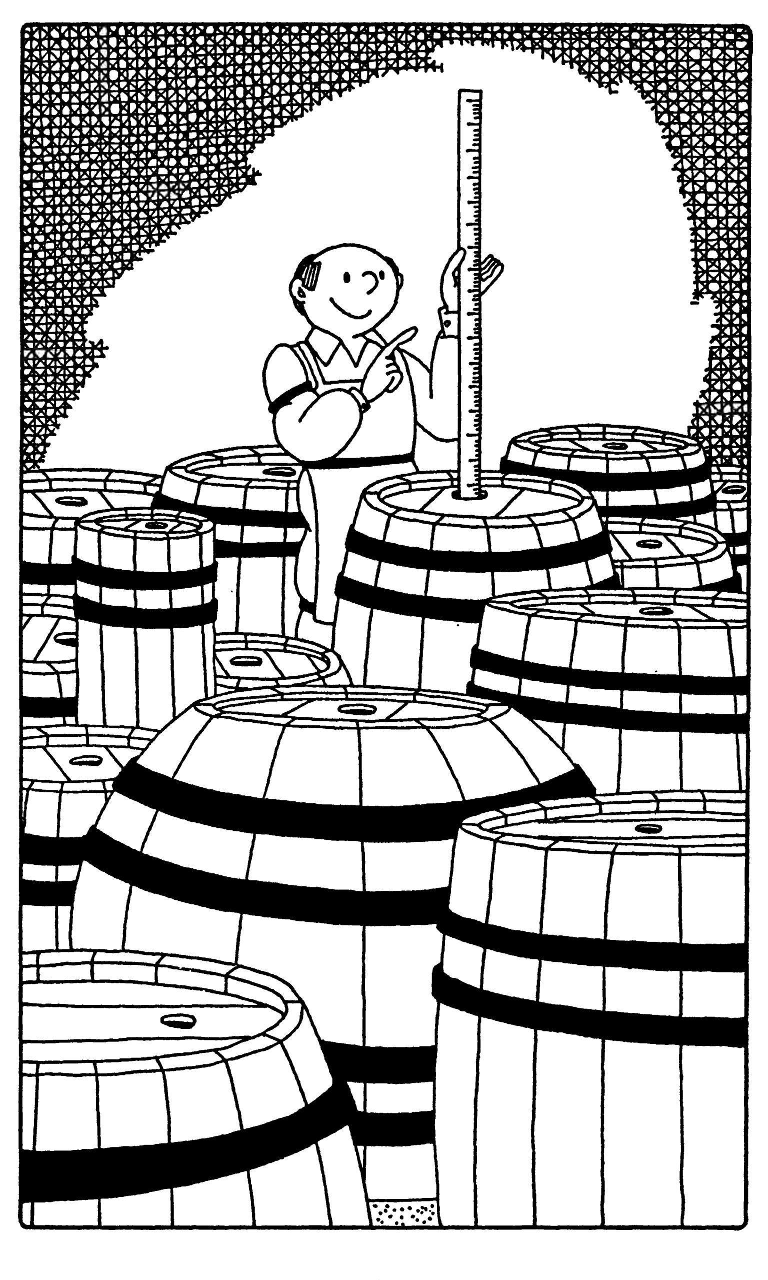


Кеплер И.

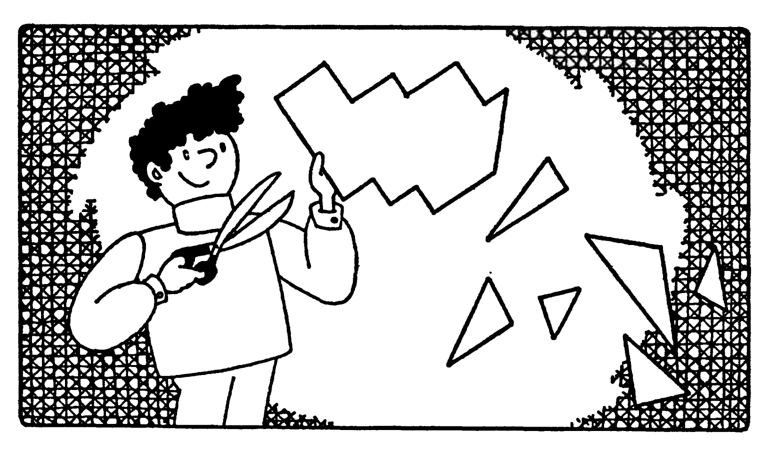
щим исследовать геометрические законы такого измерения и выяснить его основания, если таковые имеются».

Исследования Иоганна Кеплера явились продолжением работ знаменитого Архимеда, который умел находить объемы цилиндров, конусов и шаров. В частности, им было получено красивое доказательство того, что объем шара равняется 2/3 объема описанного вокруг него цилиндра. Его метод, в дальнейшем развитый итальянским математиком **Кавальери** (1598—1647), состоял в том, что тело представлялось в виде стопки пластинок. Если у двух тел все сечения, проведенные на одинаковых высотах имеют одинаковые площади, то заключалось, что они имеют и одинаковые объемы. Этим методом легко установить, что все пирамиды, имеющие одинаковые высоты и равные площади оснований, имеют и равные объемы.

Определение объема аналогично определению площади плоской фигуры. Что значит найти площадь фигуры? Это значит найти сколько раз в ней укладывается единичный квадратик. Соответственно, объем тела — это количество единичных кубиков, составляющих это тело. Ясно, что площадь прямоугольника равна произведению его ширины и высоты, а объем прямоугольного параллелепипеда — произведению его измерений. Следующий шаг — определение площади треугольника — совершается с по-



мощью разрезания его на три части, из которых можно сложить прямоугольник, а любой многоугольник всегда можно разрезать на треугольники. Тем самым определяется площадь многоугольника. Любой многогранник также можно разрезать на простейшие фигуры — тетраэдры, но разрезать произвольный тетраэдр на части, из которых можно было бы сложить прямоугольный параллелепипед, никак не получалось. В 1900 году выдающийся немецкий математик Д.Гильберт на II Международном математическом конгрессе сформулировал 23 важнейшие проблемы, требующие разрешения. Среди них был и вопрос о возможности такого разрезания. Почти сразу на него был получен ответ. Оказалось, что такое разрезание возможно лишь в некоторых случаях. В частности, куб и равновеликий ему правильный тетраэдр нельзя разрезать на попарно равные



части. Разумеется, объем тетраэдра вычислить не очень трудно, и еще древние греки знали, что он равен одной трети произведения площади основания на высоту, а упомянутые работы Архимеда свидетельствуют о глубоких знаниях теории объемов.

БОНАВЕНТУРА КАВАЛЬЕРИ
(1598—1647)

Этого человека великий Галилео Галилей называл «вторым Архимедом» и «истинно дивным гением» и не сомневался, что при желании он сравнится в астрономии с Птолемеем, как стал уже в геометрии соперником Архимеда... Этот человек — итальянский монах, брат Бонавентура Кавальери из Милана.

Родом из некогда знатной, но обедневшей семьи, он получил в молодости прекрасное гуманитарное образование. Огромное влияние оказали на него монахи соседнего с родительским домом Кавальери монастыря св. Иеронима, в который и поступил юноша. В то время монастыри были почти единственными очагами образованности в Милане, так что этот выбор жизненного пути был вполне естественным для молодого человека, увлекающегося точными науками. Позднее, перейдя в монастырь св. Иеронима в Пизе, Кавальери познакомился с известным тогда

математиком-бенедиктинцем Кастелли, который принял живейшее участие в его занятиях геометрией, руководил ими и даже поручал молодому ученому замещать его на кафедре математики Пизанского университета. Кастелли же познакомил Кавальери с Галилеем.

Вся жизнь Кавальери была тесным переплетением богословских и математических занятий. От него ожидали проповедей, он же увлекался наукой. Переезжая из города в город, из монастыря в монастырь, он делал церковную и математическую карьеру одновременно. Но занятия отвлеченными науками в те времена, когда особенно ценились знания, приносящие практическую пользу, были возможны только при наличии богатого покровителя. К счастью для науки, многим аристократам льстило звание меценатов... В судьбе Кавальери принял горячее участие один из римских сановников, большой поклонник Галилея. В Риме, под крылом этого сановника, Кавальери и написал давно не дававший ему покоя труд, главный труд своей жизни — «Геометрию неделимых».



Кавальери Б.

Коротко говоря, метод неделимых Кавальери — это способ определения размеров фигур и тел (их площадей и объемов). Он обнаружил, что две внешне не сходных фигуры имеют равные площади, если равны все отрезки, высекаемые из этих фигур прямыми, параллельными некоторой данной прямой. Точно так же равны объемы любых двух тел, если равны их сечения набором плоскостей, параллельных некоторой данной плоскости. По существу, здесь появляются начатки интегрального исчисления, изобретенного много позже великими умами последующих веков.

Кроме принципа Кавальери, увековечившего его имя, он занимался и логарифмами, только что появившимися, и тригонометрией, и коническими сечениями, и астрономией (он впервые в Италии излагал с кафедры теорию строения Солнечной системы, созданную Коперником!); среди его работ — и конструкция гидравлической машины, и три астрологических книжки (забавно, что Кавальери, всегда заявлявший, что он противник астрологических предсказаний, тем не менее отдал дань моде на прочтение судеб по звездам)...

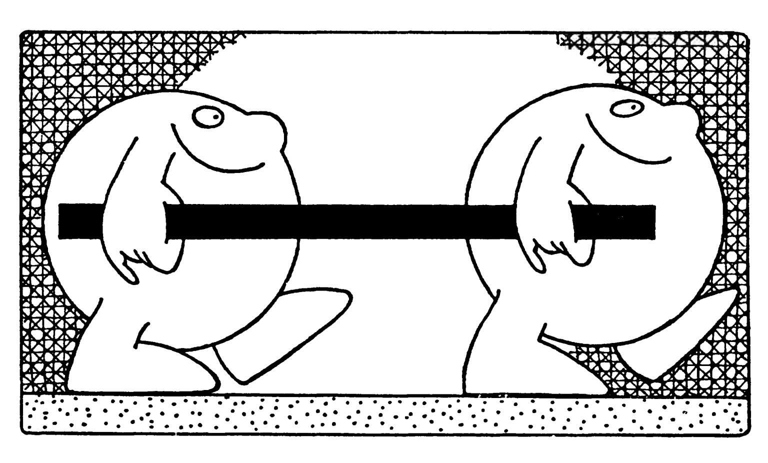
Окруженный почетом, поддержанный благосклонностью Ватикана (папа Урбан VIII назначил его пожизненным приором монастыря св. Марии делла Маскарелла, чтобы он «не имея над собой никакого начальства,

мог без помехи заниматься научной работой»), издавший при жизни свое главное научное сочинение, профессор Болонского университета Кавальери умер... и был вскоре забыт. Его «Геометрия неделимых» веками пользовалась славой самого неудобочитаемого сочинения по математике. Правда, есть основания полагать, что эту характеристику книге последующие поколения присвоили, не читая ее...

ТОЧКА

Вот она, наша героиня. Прямо в тексте статьи появилась, и отдельный чертеж ей не нужен. Такая маленькая, такая простенькая. Проще может быть только пустое место.

Но какой-то чертик ехидно шепчет в левое ухо: «Не то! Эта точка — типографская,



а не геометрическая. Геометрическую ни в какой микроскоп не разглядеть — она нулевого размера!»

Позвольте, но почему именно нулевого, а не чуточку побольше? Да потому, что отрезок конечной длины состоит из бесконечного числа точек. Не из миллиона, не из миллиарда, а именно из бесконечного количества.

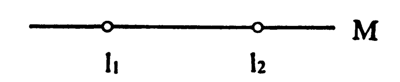
Слово «точка» в русском языке означало конец заточенного гусиного пера, которым раньше писали. Так что оно происходит от слова «точить». Хитрюга-софист Зенон и так, и этак вертел понятием бесконечности, смущая доверчивых граждан всякими безобразиями, которые якобы никогда не могут кончиться (об этом читайте в статьях «Софизмы» и «Ахиллес и черепаха»).

Однако в том же V веке до н.э. младший современник Зенона, философ и физик Демокрит, выдвинул идею неделимого атома — первоосновы всего более сложного. Его принцип: «Во всем мире существуют только атомы и пустота» — спас идею геометрической точки. А еще полвека спустя появилось учение Платона об идеальных мирах, и уж в них-то геометрическая точка заняла приличествующее ей положение.

В своих «Началах» Евклид сформулировал четкое и недвусмысленное определение: «Точка есть то, что не имеет частей», короче говоря — атом, как у Демокрита. Да вот

ведь казус: свойства точки, описанные в аксиомах, работают вовсю, а ее определение во всех тринадцати книгах «Начал» не применяется ни разу.

Не понадобилось оно геометрам ни в пятнадцатом веке, ни в девятнадцатом... Поэтому и стали в учебниках писать, что нет у точки определения — простейшее, мол, понятие, к другим не сводимое. И сейчас так пишут.



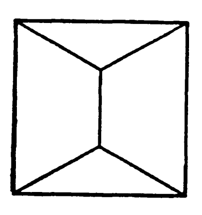
А в проективной геометрии к тому же была обнаружена двойственность точек и прямых: можно в любой теореме поменять слова «точка» и «прямая» местами — и вновь получится верное утверждение. И все-таки не хочется соглашаться с тем, что на представленном чертеже нарисованы прямые l_1 и l_2, пересекающиеся в длинной-предлинной точке M...

ПРО КВАДРАТ

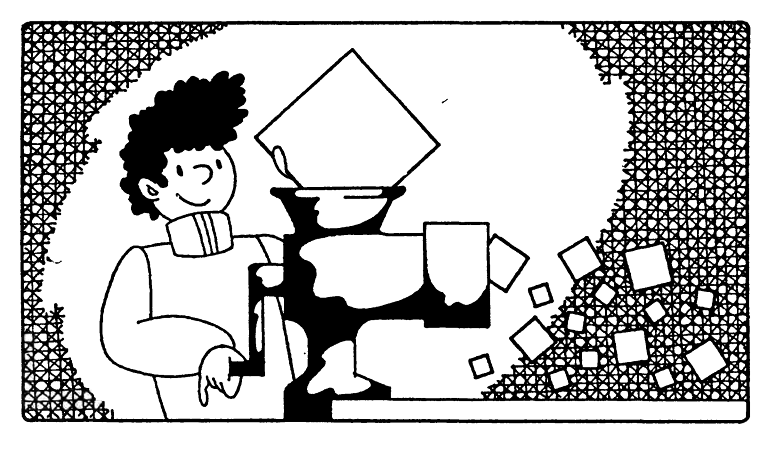
Главной заслугой квадрата стало использование его, как удобной единицы площади. Действительно, квадратами очень удобно замащивать плоские участки, а скажем, кру-

гами такого не сделаешь без дыр и наложений. Часто математики вместо слов «нахождение площади» говорят «квадрирование»; так, задача о нахождении площади круга называется задачей о квадратуре круга. Квадрат — главное действующее лицо в теореме Пифагора. Он стал олицетворением второй степени, вспомним: квадратный корень, квадратное уравнение, квадратный трехчлен.

О различных применениях квадрата в математике можно рассказывать очень долго, но давайте присмотримся к самому квадрату — так ли он прост, как это кажется. Для начала вам вопрос: как провести в квадрате сеть дорог, по которым можно проехать из любой вершины в любую, имеющую наименьшую длину? Сеть, состоящая из трех сторон квадрата, длиннее, чем сеть, составленная из двух диагоналей. А можно ли сделать ее еще короче? Оказывается, можно. Такая сеть изображена на рисунке. Она похожа на фрагмент пчелиных сот. Углы между отрезками в середине квадрата равны по 120°. Для сети из трех сторон квадрата со стороной 1 длина сети равна 3, для диагоналей она равна $2\sqrt{2} = 2,828...$, а в третьем случае она равна $1 + 7\sqrt{3} = 2,732...$ Более короткой сети нет.



Разделить квадрат на более мелкие квадратики одинаковой площади очень просто: достаточно провести сетку равноотстоящих прямых, параллельных сторонам квадрата. Количество полученных квадратиков будет квадратом, да, да! Именно поэтому произведение двух одинаковых чисел назвали квадратом.



Но математики — народ дотошный, для всякого утверждения они рассматривают противоположные, которых может быть несколько. Так вот, возник вопрос: а можно ли разрезать квадрат на несколько квадратиков, среди которых нет одинаковых?

Этот вопрос долго оставался нерешенным. Многие даже выдающиеся математики считали, что такое разрезание невозможно. Но в 1939 году было построено разбиение квадрата на 55 различных квадратов. В 1940 году были найдены два способа разбиения

квадрата на 28 различных квадратов, затем — на 26 квадратов, а в 1948 году было получено разбиение на 24 различных квадрата. В 1978 году было найдено разбиение на 21 различный квадрат и доказано, что разбиение на меньшее число различных квадратов найти уже нельзя.

ПОГОВОРИМ О КРУГЕ

В Древней Греции круг и окружность считались венцом совершенства. Действительно, в каждой своей точке окружность устроена одинаковым образом, что позволяет ей двигаться самой по себе. Это свойство окружности сделало возможным возникновение колеса, поскольку ось и втулка колеса должны все время быть в соприкосновении.

В русском языке слово «круглый» тоже означает высокую степень чего-либо: «круглый отличник», «круглый сирота» и даже «круглый дурак».

В школе изучается много полезных свойств окружности. Одной из самых красивых теорем является следующая: проведем через за-

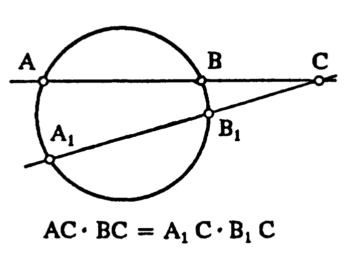


Рис. 1

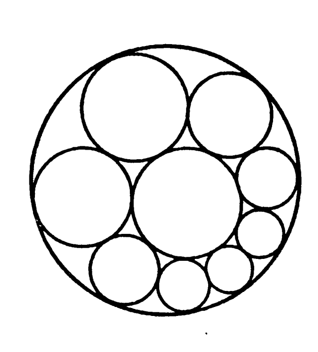


Рис. 2

данную точку прямую, пересекающую заданную окружность, тогда произведение расстояний от этой точки до точек пересечения окружности с прямой не зависит от того, как именно была проведена прямая (рис. 1). Этой теореме не менее двух тысяч лет. Математиками за эти годы было доказано много интересных утверждений, главным действующим лицом, которых была окружность. Расскажем об одной из них.

На рис. 2 изображены две окружности и цепочка окружностей, каждая из которых касается этих двух окружностей и двух соседей по цепочке. Если вы попробуете сами нарисовать такую картинку, то есть сначала нарисовать две окружности, затем между ними поставить третью, касающуюся их, затем четвертую, касающуюся всех трех, затем пятую, касающуюся первой, второй и четвертой и т.д., то скорее всего эта цепочка не замкнется. Если вы обвините в этом неудачный выбор третьей окружности, то будете не правы. Швейцарский геометр Якоб Штейнер около 150 лет назад доказал следующее утверждение: если при некотором выборе

третьей окружности цепочка замкнется, то она замкнется и при любом другом выборе третьей окружности. Отсюда следует, что если однажды цепочка не замкнулась, то она не замкнется при любом выборе третьей окружности. Художнику, рисовавшему изображенную цепочку, пришлось бы немало потрудиться, чтобы она получилась, или обратиться к математику для расчета расположения двух первых окружностей, при котором цепочка замыкается.

Вначале мы упомянули о колесе, но еще до колеса люди использовали круглые бревна-катки для перевозки тяжестей. Рисунки на стенах египетских пирамид рассказывают нам, что именно так доставлялись огромные камни на строительство этих пирамид. А можно ли использовать катки не круглой, а какой-нибудь другой формы? Немецкий инженер **Франц Рело** обнаружил, что таким же свойством обладают катки, форма которых изображена на рис. 3. Эта фигура получается, если провести дуги окружностей с центрами в вершинах равностороннего треугольника, соединяющие две другие вершины. Если провести к этой фигуре

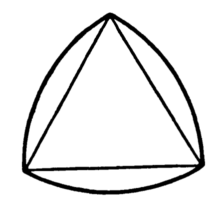
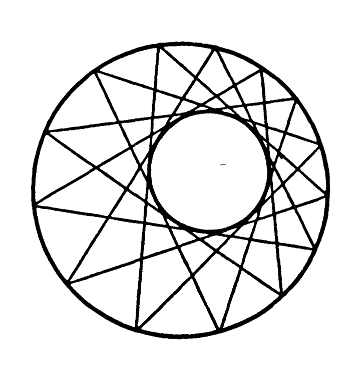


Рис. 3


Рис. 4

две параллельные касательные (рис. 4), то расстояние между ними будет равно длине стороны исходного равностороннего треугольника, так что такие катки ничем не хуже круглых. В дальнейшем были придуманы и другие фигуры, способные выполнять роль катков.

О ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Треугольник — это простейшая фигура: три стороны и три вершины. Математики его называют двумерным симплексом. «Симплекс» по-латыни означает простейший. Трехмерным симплексом называют треугольную пирамиду. Именно в силу своей простоты треугольник явился основой многих измерений. Землемеры при своих вычислениях площадей земельных участков и астрономы при нахождении расстояний до планет и звезд используют свойства треугольников. Так возникла наука тригонометрия — наука об измерении треугольников, о выражении сторон через его углы.

Через площадь треугольника выражается площадь любого многоугольника: достаточно

разбить этот многоугольник на треугольники, вычислить их площади и сложить результаты. Правда, верную формулу для площади треугольника удалось найти не сразу. В одном египетском папирусе 4000-летней давности говорится, что площадь равнобедренного треугольника равна произведению половины основания на боковую сторону (а не на высоту).



Через 2000 лет в Древней Греции изучение свойств треугольника ведется очень активно. Пифагор открывает свою теорему. Герон Александрийский находит формулу, выражающую площадь треугольника через его стороны; становится известным, что биссектрисы, как меридианы и высоты, пересекаются в одной точке.

Особенно активно свойства треугольника исследовались в XV—XVI веках. Вот одна из красивейших теорем того времени, при-

надлежащая Леонарду Эйлеру: «Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков высот от вершины до точки их пересечения лежат на одной окружности». Эта окружность получила название «окружности девяти точек». Ее центр оказался в середине отрезка, соединяющего точку пересечения высот с центром описанной окружности (см. рис.1).

Император Франции Наполеон свободное время посвящал занятиям математикой. Ему приписывают такую красивую теорему: «Если на сторонах треугольника во внешнюю сторону построить равносторонние треугольники (рис.2), то их центры будут вершинами равностороннего треугольника». Этот треугольник называется внешним треугольником Наполеона. Аналогично стоится и внутренний треугольник Наполеона. Огромное количество работ по геометрии треугольника, проведенное в XV—XIX веках, создало впечатление, что о треугольнике уже известно все. Тем удивительнее было открытие, сделанное американским

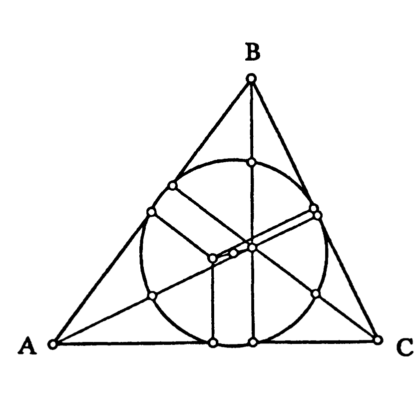


Рис. 1

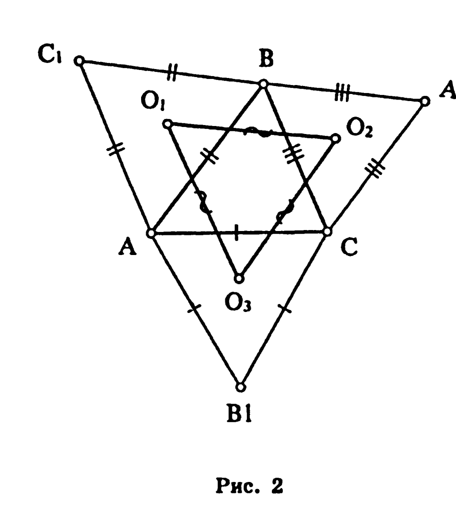
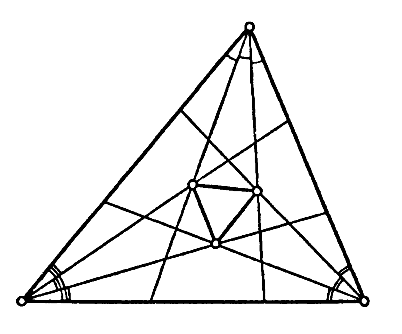


Рис. 2

математиком Ф.Морли. Он доказал, что если в треугольнике провести через вершины лучи, делящие углы на три равные части, то точки пересечения смежных трисектрис углов (рис.3) являются вершинами равностороннего треугольника.

Инженеры любят треугольник за его «жесткость»: даже если стержни, образующие треугольник, соединить шарнирно, то его невозможно изменить, в отличие от четырехугольников и многоугольников с большим числом сторон, где такое соединение допускает изменение формы многоугольника. Взгляните на металлические фермы мостов — со-


Рис. 3

ставляющие их балки образуют треугольники.

Но устойчивы они потому, что через три точки всегда проходит плоскость...

ОТКУДА ВЗЯЛИСЬ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕРМИНЫ

Почти все названия геометрических фигур греческого происхождения, как и само слово геометрия, происходящее от греческого слова **геометрия** — землемерие. Однако эти слова вошли в русский язык не непосредственно с греческого, а через латинский язык.

«Конус» — это латинская форма греческого слова «конос», означающего сосновую шишку.

«Цилиндр» происходит от латинского слова «цилиндрус», являющегося латинской формой греческого слова «кюлиндрос», означающего «валик», «каток».

«Призма» — латинская форма греческого слова «присма» — опиленная (имелось в виду опиленное бревно).

«Сфера» — латинская форма греческого слова «сфайра» — мяч.

«Пирамида» — латинская форма греческого слова «пюрамис», которым греки называли египетские пирамиды; это слово происходит от древнеегипетского слова «пура-

ма», которым эти пирамиды называли сами египтяне. Современные египтяне называют пирамиды словом «ахрам», которое также происходит от этого древнеегипетского слова.

«Трапеция» происходит от латинского слова «трапезиум» — латинской формы греческого слова «трапезион» — столик. От этого же корня происходит наше слово «трапеза», означающее по-гречески стол.

«Ромб» происходит от латинского слова «ромбус» — латинской формы греческого слова «ромбос», означающего бубен. Мы привыкли к тому, что бубен имеет круглую форму, но раньше бубны имели форму квадрата или ромба, о чем свидетельствуют изображения «бубен» на игральных картах.

Непосредственно из латинского языка мы заимствовали слово «пункт», употребляющееся иногда в значении «точка» (отсюда «пунктир») и линия. «Пункт» происходит от латинского слова «пунктум» — укол; от этого же корня происходит медицинский термин «пункция» — прокол.

«Линия» происходит от латинского слова «линеа» — льняная (имеется в виду льняная нить). От этого же корня происходит наше слово линолеум, первоначально означавшее промасленное льняное полотно.

Таким образом, названия геометрических фигур первоначально были названием конкретных предметов, имеющих форму,

более или менее близкуı к форме данной фигуры.

Но и многие другие математические термины тоже имеют «греко-латинское» происхождение. Так, термин «скалярная величина» (характеризуемая только числовым значением) происходит от латинского слова «скалэ», означающего лестницу («скалярис» — ступенчатый), — то, что можно пересчитать. Отсюда же слово «шкала». Величины, характеризуемые не только числовым значением, но и направлением, называются векторами (от латинского «вектор» — воздушный, несущий).

Слово «горизонталь» происходит от греческого «горизонт» — разграничивающий, так как горизонт как бы отделяет небо от земли. Вертикальная линия — линия, направление которой как бы совпадает с направлением отвеса; она перпендикулярна горизонтали. Слово «перпендикуляр» происходит от латинских «пэндере» — висеть — и «пэр» — сверх, верх, — т.е. «перпендикуляр» переводится как «висящий сверху», или «отвесный».

Греческое слово «гипо» означало «под, внизу, снизу», а «тейнейн» — натягивать (например, тетиву лука). Из этих двух слов образовался термин «гипотенуза» — сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, как бы «натянутая» между катетами.

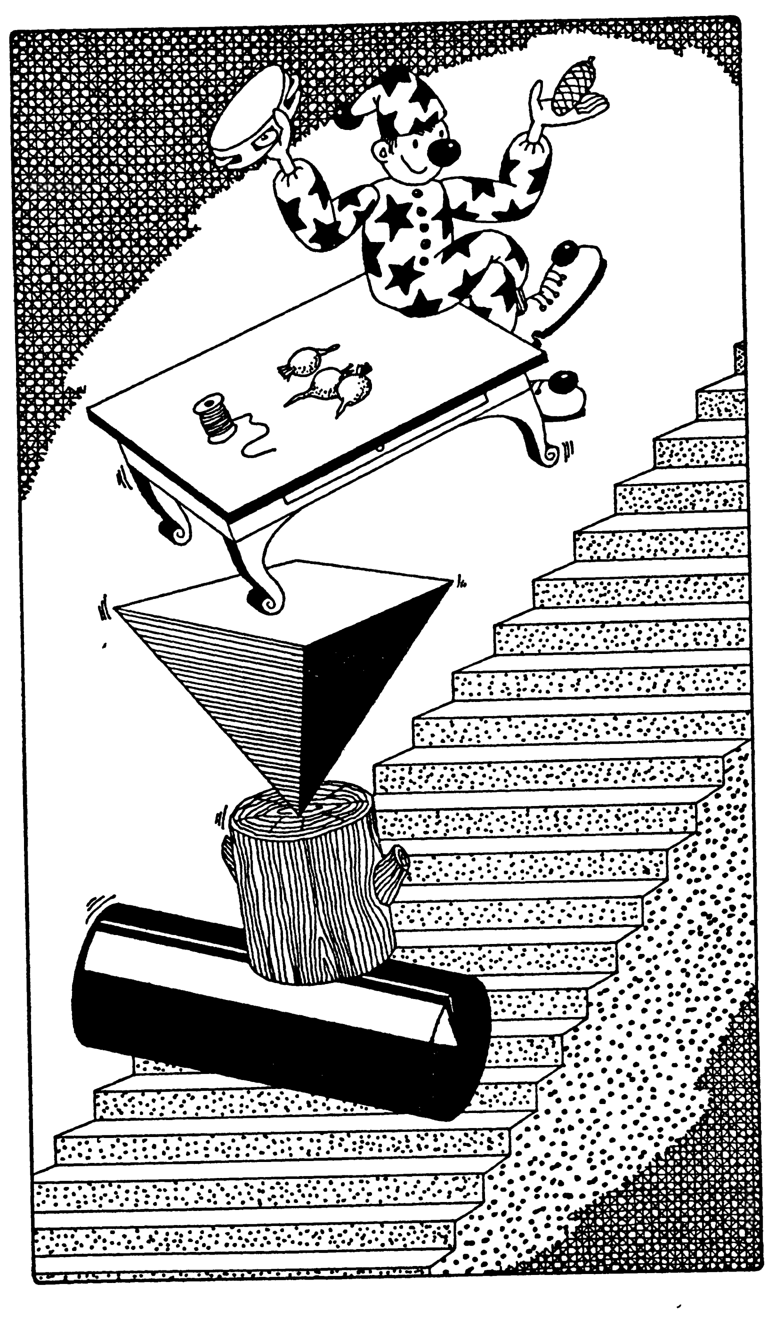
Слово «диагональ» происходит от греческого «диа», что означает «через», и «гониа» — угол, т.е. рассекающая углы, проходящая через углы. В круге нет углов, поэтому там не может быть и диагонали, зато в нем можно провести хорду, что по-гречески означает «струна, стягивающая что-то, расходящееся в стороны». Самая большая хорда — диаметр, что значит... «измерение через».

Сумма всех сторон многоугольника — периметр — означает «измерение вокруг» (греческое «пери» — вокруг, около).

Парабола — от греческого «пара» — рядом — и «баллейн» — бросать (от второго из них происходит и слово баллистика). От первого из этих корней в сочетании с «аллелос» (идущий) произошел термин параллельность; если добавить «грамма» — черта, линия по-гречески — получится слово «параллелограмм». А квадрат — от латинского «кваттуор» (четыре) — всего-навсего фигура с четырьмя сторонами... Слово же «эллипс» происходит от... недостатка, изъяна («эллейпсис» по-гречески) — это деформированный круг, утративший свойственное кругу совершенство формы!

Спираль — от латинского слова «спира», что значит изгиб, извив.

А вот слово «пример» происходит от латинского названия «притус нумерус» (первые числа) — так называли простые числа.



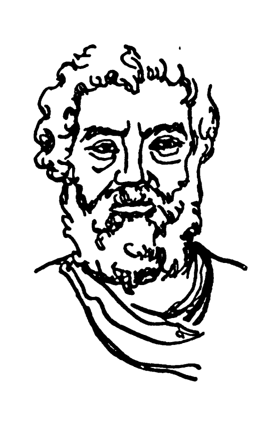
Позднее слово «примус» превратилось в «пример» и стало обозначать задачу с числами, и лишь затем приобрело более широкий, не только математический, смысл.

Слово же «корень» (квадратный, или корень уравнения) пришло в математику от арабов. Арабские ученые представляли себе квадрат числа вырастающим из корня — как растение, — и потому называли корнями такие числа. Слово латинского происхождения «радикал» — тоже потомок «корня» («радикс» по-латыни). Кстати, его следы можно найти даже в словах редис, редька и радикулит — воспаление нервных корешков.

КТО БЫЛ ПЕРВЫМ МАТЕМАТИКОМ?

История не сохранила ни имен древнеегипетских, ни вавилонских «решателей» задач. Так что первого известного математика придется искать среди древних греков. Наибольшие основания на этот титул у Фалеса Милетского, родившегося в середине седьмого века до н.э. и прожившего долгую и, несомненно, яркую жизнь.

Об этом человеке почти ничего не известно достоверно. Но ему повезло больше, чем родоначальнику литературы — Гомеру — по крайней мере, никто не сомневается в существовании этой личности. Мы знаем, что


Фалес

в молодости Фалес был крупным купцом и путешественником, а в старости считался одним из величайших греческих мудрецов.

В те далекие времена еще не существовало отдельных наук о величинах, о природе и о мышлении — все было слито воедино. «Можно проводить не только практические, но и мысленные опыты!» — эта значительная идея Фалеса, в равной мере, принадлежит математике, физике и философии. И не случайно Фалес считается родоначальником всех трех названных наук.

Мысленные опыты Фалеса легли в основу первых математических доказательств. Например, Фалес доказал теорему о равенстве вертикальных углов.

«Эти углы можно совместить, повернув один из них, — рассуждал мудрец. — Значит, они равны». Как это просто для нас — и каким гигантским шагом вперед стало это доказательство в истории математики!

Но Фалес пошел еще дальше — он создал метод. При помощи мысленных движений и совмещений было доказано еще несколько

теорем. Одна из них до сих пор сохраняется в школьном курсе геометрии под названием теоремы Фалеса.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Люди во все времена смотрели на небо. Поэты воспевали красоту звездной ночи, астрологи предсказывали судьбы мира и отдельных людей. Но главное — звезды, Солнце и Луна определяли начало весны и лета, время приливов и отливов, разливов Нила... Когда же жители Средиземноморья стали отплывать далеко от побережья, звезды стали основными ориентирами. Полярная звезда показывала на север. По расположению созвездий можно было точно вычислить, где оказался корабль, — если научиться вычислять свое местоположение по звездам...

Если Земля долгое время казалась плоской (дальше домысливались киты, слоны и черепахи, на которых она стояла, — фантазии у человека всегда было вдосталь), то небо имело несомненно форму купола. Твердый он или нет — эту проблему предстояло еще решить, но что небо — это поверхность сферы, видно было, так сказать, невооруженным глазом. Гораздо позже разобрались, что там, в звездной выси, но модель неба как свода позволяла пользоваться картиной расположения звезд в разнообразных практических ситуациях. Расстояние от наблю-

дателя до звезд огромно, но для насущных нужд несущественно. Достаточно было выяснить, на какую высоту над горизонтом поднимается та или иная звезда в данное время в данной местности.

Но если неизвестно расстояние в локтях или милях, как мерить высоту светила над горизонтом? Астрономы нашли выход еще в незапамятные времена: они измеряли угол между плоскостью видимой земной (или морской) поверхности и направлением от глаза наблюдателя на светило. О древности угловой меры говорит уже то, что угол делится на шестидесятиричные доли — минуты и секунды. Выходит, это наследство Вавилона.

Итак, небо было измерено и исчислено — в углах. Моряки не выходили в плавание без точных часов — хронометра — и секстанта — прибора для измерения углов...

Необходимость вычисления положения звезд для всевозможных долгосрочных прогнозов привела к необходимости научиться обращаться с углами так же свободно, как и с расстояниями. Дитя астрологов и навигаторов — сферическая геометрия — привела к созданию **тригонометрии** — науки об измерении треугольника. Связь длин сторон треугольника с его углами была замечена еще египтянами — они знали, как отмерить точно прямой угол. (Кстати, возможно, что число градусов в развернутом угле — 180° — пошло от треугольника: у правильного тре-

угольника ведь углы по 60°, а число 60 просто так не появляется...)

Посмотрим на прямоугольный треугольник. Видно, что чем больше сторона *a*, тем больше и угол альфа, но тем меньше угол бета (рис.1). Сторона *a* может быть сколь угодно длинной, но никогда не будет равна стороне *c*. Отношение *a*/*c*, таким образом, никогда не превышает единицы, но никогда и не бывает меньше нуля, — иначе это уже не треугольник. Это отношение, названное синусом угла альфа, оказалось чрезвычайно полезным. Но если в прямоугольном треугольнике угол альфа может изменяться от 0° до 90°, то в тупоугольном треугольнике это не так. Однако всякий тупоугольный треугольник можно разбить на прямоугольные (рис.2), а значит, найти и синус тупого угла. Постепенно синус стал определяться для любого угла. И лишь с появлением систем координат появилось и нынешнее определение синуса: это ордината

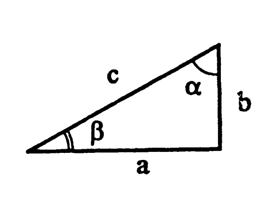


Рис. 1

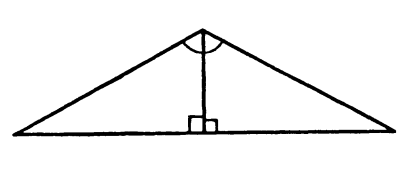


Рис. 2

точки, находящейся на единичной окружности (рис.3).

Происхождение слова «синус» довольно забавно. Придумавшие это понятие индусы называли длину хорды, стягивающей данную дугу, словом «джива» или «джийя», означавшим тетиву охотничьего лука. В арабском языке это слово, звучавшее как «джиба», превратилось затем в «джайб» (арабы не пишут гласных букв), так что это неудивительно. Слово же «джайб» означает «пазуха», поэтому переводчик арабского текста на латинский язык перевел это слово: «sinus» — пазуха...

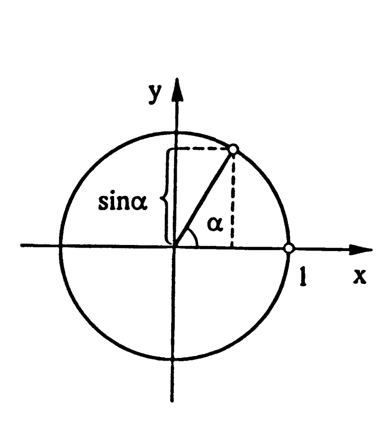
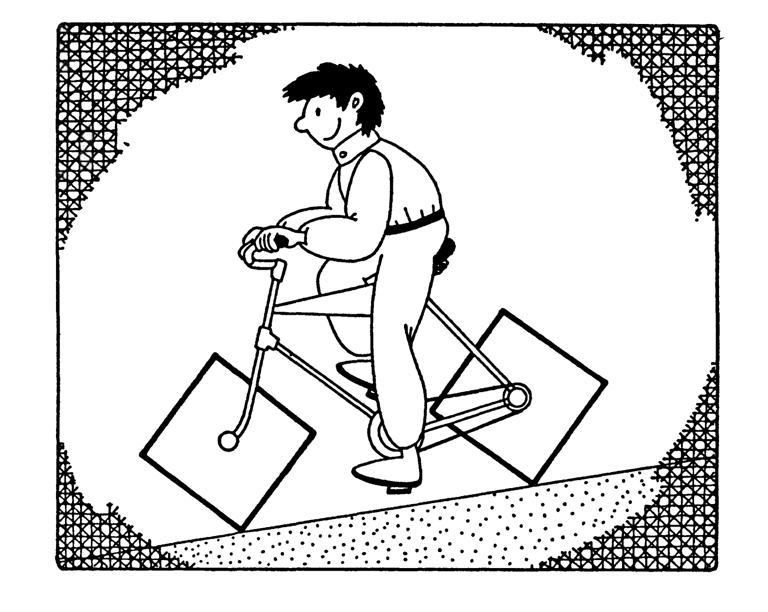


Рис. 3

КВАДРАТУРА КРУГА

Выражение «квадратура круга» стало синонимом неразрешимой задачи. А заключается она в построении с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу.



Как следует из подобия фигур, отношение длины окружности к диаметру есть величина постоянная, не зависящая от радиуса круга. Она обозначается греческой буквой π. Около ста лет назад было доказано, что это число не может быть выражено обыкновенной или конечной десятичной дробью, а приближенные значения для π находили еще 2000 лет до нашей эры. В египетских папирусах оно принимается равным $(16/9)^2 = 3{,}1604...$ Архимед использовал для вычисления этого числа вписанные и описанные многоугольники от шестиугольника до 96-угольника. Ему принадлежит одно из простейших приближенных представлений числа π $22/7 = 3{,}1428...$ Индусы в V—VI веках пользо-

вались числом корень квадратный из $\sqrt{10} = 3{,}1611...$, китайцы — числом 22/7 и более точным числом 355/113 = 3,1415929.

Первые тридцать знаков числа π таковы: 3,141592653589793238462643383279... Для запоминания цифр числа π в одной из московских школ было придумано стихотворение:

Это я знаю и помню прекрасно:
«Пи» многие знаки мне лишни, напрасны.

Если записать последовательно количество букв в каждом из слов, то получим последовательность знаков числа π.

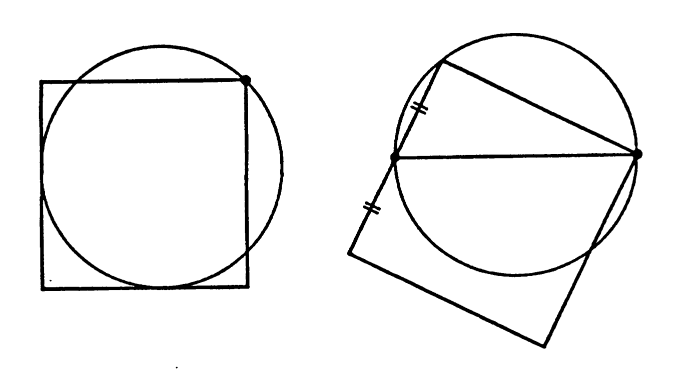
А можно воспользоваться следующим стишком:

Нужно только постараться
И запомнить все, как есть:
Три, четырнадцать, пятнадцать
Девяность два и шесть.

С. Боборов, «Волшебный двурог».

В 1596 году голландский математик Ван Цейлен нашел 32 первых знака числа π, в 1719 году французский математик Ланьи вычисляет π со 140 верными знаками. В 1844 году немец Дазе нашел π с 200 знаками, в конце XIX века было уже известно более 500 верных знаков числа π. С появлением компьютеров нахождение верных знаков числа π стало легким делом. Недавно американцы Джонатан и Питер Борвейны нашли π с 29 360 128 верными знаками. Это

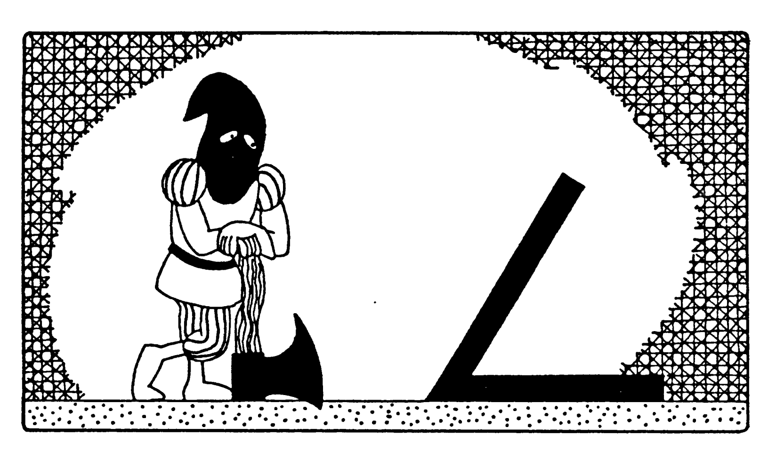
число хранится в памяти компьютера. Если его распечатать, то оно займет 30 томов по 400 страниц. Японские математики обещают вычислить π с 100 000 000 верными знаками.



Но вернемся к началу. Мы говорили, что задача квадратуры круга — это задача построения с помощью циркуля и линейки квадрата равновеликого данному кругу. Лишь в 1882 году немецкий математик Ф.Линдеман доказал невозможность такого построения. Хотя эта задача неразрешима, но существуют изящные приближенные способы. Например, изображенные на рисунке. Попробуйте сами выполнить такое построение и найти, какое значение для π соответствует этому построению.

ТРИСЕКЦИЯ УГЛА

Провести биссектрису угла довольно просто. Действительно, проведем окружность с центром в вершине угла, а потом с центрами из точек пересечения этой окружности со



сторонами угла проведем тем же радиусом еще по окружности. Одна из точек их пересечения будет вершиной угла, а вторая будет лежать на биссектрисе этого угла (рис.1). А вот разделить угол на три равные части с помощью циркуля и линейки никак не удавалось.

В 1837 году французский математик П.Ванцель доказал, что в общем виде задача не имеет решения, а возможно такое деление лишь в нескольких исключительных случаях, куда входят углы в 90° и углы, получаемые из него с помощью деления угла пополам.

Однако до сих пор математические институты и редакции математических журналов получают большое количество писем, авторы которых утверждают, что ими получен способ деления угла на три равные части с помощью циркуля и линейки. При этом одни предлагают приближенные способы, а другие предлагают использовать помимо линейки иные инструменты или предварительно начерченные кривые.

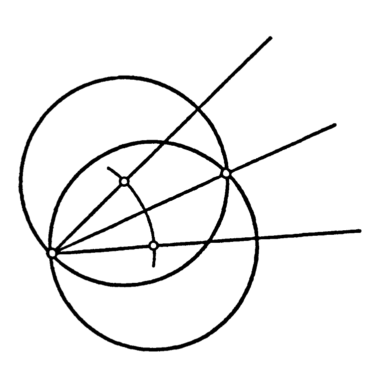


Рис. 1

Использование кривых для проведения трисекции угла встречаются у многих древнегреческих математиков. Динострат применял кривую, называемую квадратриссой. Помимо трисекции угла с ее помощью можно было находить площади кругов. Никомед исполь-

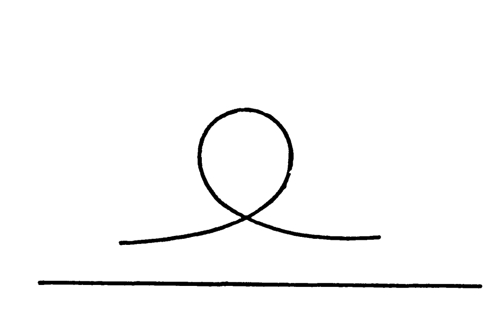


Рис. 2

зовал для трисекции угла **конхоиду**.

Конхоида в переводе с греческого означает «похожая на раковину». Образуется она довольно просто. Проведем прямую на плоскости и отметим точку O вне этой прямой. Теперь начнем проводить через точку O всевозможные прямые и от точек их пересечения с первоначальной прямой будем откладывать на этих прямых в обе стороны отрезки одной и той же длины, как это показано на рис. 2. Концы этих отрезков и образуют конхоиду.

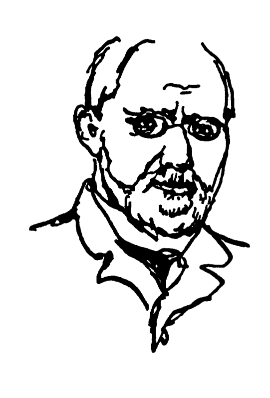
Помимо деления угла на три равные части, Никомед с помощью этой кривой решал и другую древнюю задачу — задачу удвоения куба. Существует две версии возникновения этой задачи. По первой версии жители греческого города Делоса страдали от эпидемии болезни, и для избавления от нее оракул повелел им удвоить алтарь в храме, сохранив форму куба. Рабочие построили новый алтарь, стороны которого были вдвое больше прежних, но такая необдуманная работа не удовлетворила богов. Тогда жители обратились к знаменитому философу Платону, который и сформулировал эту задачу, получившую название «Делийской задачи».

То, что делийскую задачу невозможно решить с помощью лишь циркуля и линейки, показал П.Ванцель, доказавший и невозможность трисекции угла.

ГИЛЬБЕРТ

Среди математиков начала XX века одно из первых мест занимает профессор Геттингенского университета Давид Гильберт. Присутствие Гильберта в этом университете поставило университет в ряд крупнейших математических центров не только Германии, но и мира. Посещение университета, беседы с Гильбертом считалось почетной обязанностью каждого крупного математика.

Помимо крупнейших математических работ Гильберт прославился своим выступлением на втором Международном математическом конгрессе. В этом докладе он поставил перед математиками 23 проблемы из различных областей математики, решение которых, по его мнению, должно было определять пути развития математики в XX веке. Заметим, что этот доклад был прочитан в 1900 году. Среди этих проблем были и конкретные задачи, и общие постановки задач, которые указывали пути развития целых направлений математических исследований. К числу конкретных задач относится вопрос об



Гильберт Д.

эквивалентности понятий равновеликости и равносоставленности, т.е. верно ли, что один из двух равновеликих многогранников всегда можно разрезать на куски так, чтобы из них можно было сложить второй многогранник. Эта проблема была решена вскоре после конгресса М.Деном, который показал, что такое разрезание не всегда возможно, в частности, это невозможно для равновеликих куба и правильного тетраэдра.

В настоящее время все 23 проблемы в той или иной степени решены. Хотя до сих пор появляются работы, в которых обобщаются или уточняются достигнутые результаты. Программа Гильберта действительно стала программой развития математики в XX веке, хотя в ней появилось также много новых направлений, о которых Гильберт мог только догадываться.

Из научных достижений Гильберта следует отметить полную перестройку им евклидовой аксиоматики геометрии. В его книге «Об основаниях геометрии» дана стройная система аксиом, вобравшая в себя все новое из достижений математики XIX века в области аксиоматики. Гильберт решил и трудную «проблему Варинга» из теории чисел. Проблема заключалась в том, чтобы доказать или опровергнуть следующее утверждение: любое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более четырех квадратов, а также в виде суммы, не более

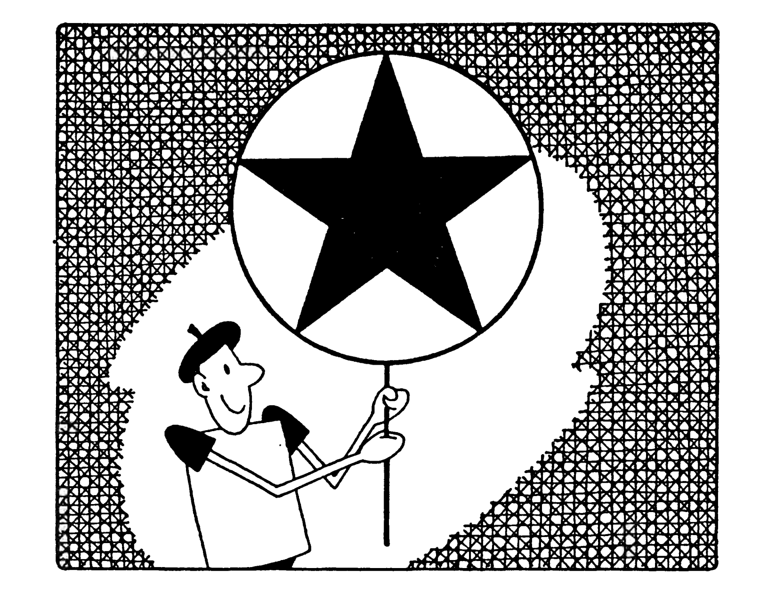
девяти кубов, а также в виде суммы не более чем девятнадцати четвертых степеней и т.д. Возможность представить любое натуральное число в виде суммы не более четырех квадратов была доказана до работы Гильберта.

Важные исследования Гильберт провел в теории бесконечных множеств, где он применяет аксиоматический метод построения теории.

В 1930 году в возрасте 68 лет Гильберт покидает университет и уходит на пенсию, как это и полагалось немецким профессорам в то время. Приход к власти фашистов привел к упадку Геттингенского университета. «Математика в Геттингене? Да она просто больше не существует» — заявил Гильберт в беседе с нацистским министром. В 1943 году Гильберт умер.

РИСУЕМ ПЯТИКОНЕЧНУЮ ЗВЕЗДУ

Как нарисовать пятиконечную звезду с помощью циркуля и линейки? Очень просто, если еще есть и транспортир. Рисуем окружность, потом на ней откладываем дуги в 72 , 144 , 216 , и 288° от некоторой точки. Полученные пять точек и будут вершинами звезды. Ну, а если нет транспортира? Можно попытаться это сделать на «глазок». Выберите раствор циркуля, соответствующий, как вам кажется, дуге в 72° . Отложите эту дугу

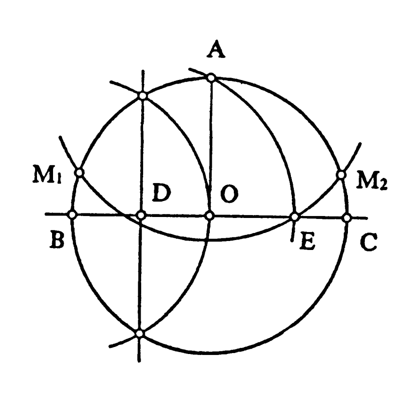


на окружности последовательно пять раз. В пятый раз ножка циркуля либо не дойдет до начальной точки, либо проскочит ее. В первом случае следует увеличить раствор циркуля, а во втором — чуть уменьшить его и снова проделать ту же операцию нахождения вершин звезды.

Если не вышло во второй раз, можно попробовать в третий раз, в четвертый, пока не получится желаемый результат.

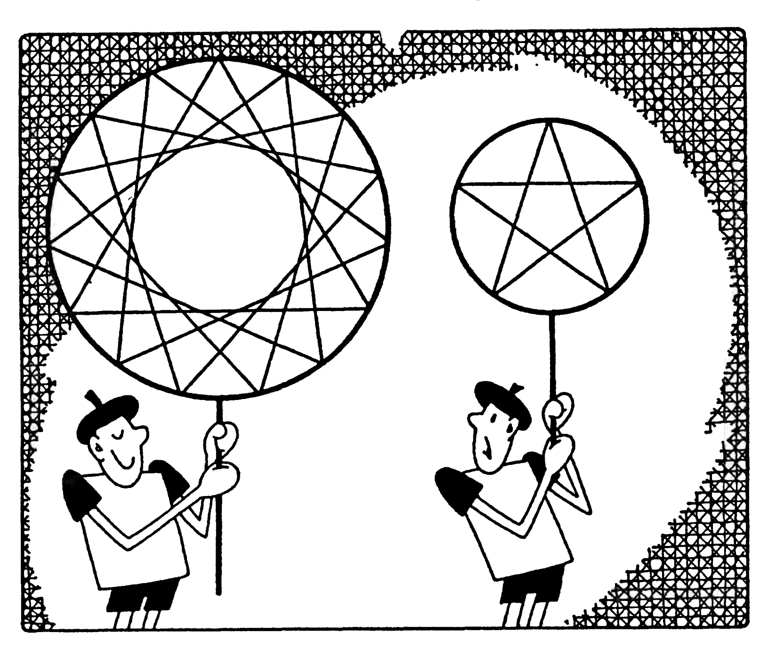
Древние греки были весьма искусны в построениях с помощью циркуля и линейки, причем линейка должна была быть без делений, с ее помощью разрешалось проводить прямые через заданные точки. Они предложили следующий не приближенный, а точ-

ный способ построения пятиконечной звезды. Нарисуем окружность, затем проведем ее диаметр BC и проведем из точки O — центра окружности, радиус OA, перпендикулярный диаметру BC. Следующим шагом было нахождение точки D — середины отрезка OB, что вы можете сделать сами, как и построить с помощью циркуля и линейки перпендикуляр к данной прямой в данной точке. Теперь проведем еще две окружности, которые принципиально закончат построение. Сначала проведем окружность с центром в точке D и радиусом DA. Отметим точку E, в которой она пересекает диаметр BC, а затем проведем окружность с центром в точке A, радиусом AE. Отметим точки M_1 и M_2, в которых она пересекает первоначальную окружность (см.рис.). Точки A, M_1 и M_2 будут вершинами пятиконечной звезды, остальные две вершины вы без труда построите сами.



О СЕМИКОНЕЧНОЙ И ДРУГИХ ЗВЕЗДАХ

Существует всего одна пятиконечная звезда, как и одна шестиконечная звезда, а вот семиконечных звезд уже две. Шести-



конечная звезда — символ Израиля, а семиконечная — основа герба Грузии. Нарисовать шестиконечную звезду не трудно, если заметить, что стороны правильного шестиугольника равняются радиусу окружности, описанной вокруг этого шестиугольника.

Долгое время математики пытались найти способ построения правильного семиуголь-

ника (а следовательно, и семиконечной звезды) с помощью циркуля и линейки, но у них ничего не выходило. Приближенных способов было придумано немало, а точного никто найти не мог.

Решение этой задачи дал девятнадцатилетний **Карл Фридрих Гаусс**. Заодно он указал все значения *n*, при которых возможно построение правильного *n*-треугольника с помощью циркуля и линейки.

Решение этой задачи оказалось связанным с другой задачей, правда, не геометрической, а теоретико-числовой. Французский математик **Пьер Ферма** предположил, что все числа вида 2 являются простыми. Действительно, при $k = 0$ получаем $2 + 1 = 3$ — простое число, при $k = 1$ получаем $2 + 1 = 5$ — простое число, при $k = 3$ получаем $2 + 1 = 257$ — тоже простое число, при $k = 4$ получаем $2+ + 1 = 65537$ — тоже простое число! На этом Ферма остановился, посчитав, что и остальные числа простые, а Леонард Эйлер установил, что следующее число Ферма — $2 + 1 = 4\ 294\ 967\ 297$ делится на 641. Интересно, что поиски простых чисел Ферма на современных компьютерах не дали результатов, все проверенные числа оказывались составными. Неизвестно, есть ли еще простые числа Ферма.

Но вернемся к результату, доказанному Гауссом. Он доказал, что все значения *n*, при которых возможно построение правиль-

ного n-угольника с помощью циркуля и линейки, это — простые числа Ферма или произведения нескольких различных простых чисел Ферма, а также числа, получающиеся из них умножением на некоторую степень числа 2. Последнее замечание очевидно, так как построив правильный многоугольник, мы без труда, проводя биссектрисы углов, построим правильный многоугольник с вдвое большим числом сторон.

Поскольку число 7 не является простым числом Ферма, то построить правильный семиугольник с помощью циркуля и линейки невозможно, как невозможно построить одиннадцатиугольник, тринадцати- и четырнадцатиугольники. А вот пятнадцатиугольник построить можно, так как $15 = 3 \cdot 5$ равняется произведению двух различных простых чисел Ферма, и двенадцатиугольник можно построить, так как он является произведением простого числа Ферма 3 на степень числа 2. Можно построить и правильный семнадцатиугольник. В своей работе Гаусс показал способ такого построения.

А можно построить правильный девятиугольник? Нет, потому что 9 хотя и равняется произведению простых чисел Ферма, но одинаковых! Если немного посчитаете, то сможете установить, что пока известна возможность построения лишь 31 правильного многоугольника с нечетным числом вершин,

поскольку мы знаем лишь 5 простых чисел Ферма.

По завершении этой работы Карл Фридрих Гаусс окончательно решил стать математиком. До этого он колебался между математикой и филологией.

КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС
(1777—1855)

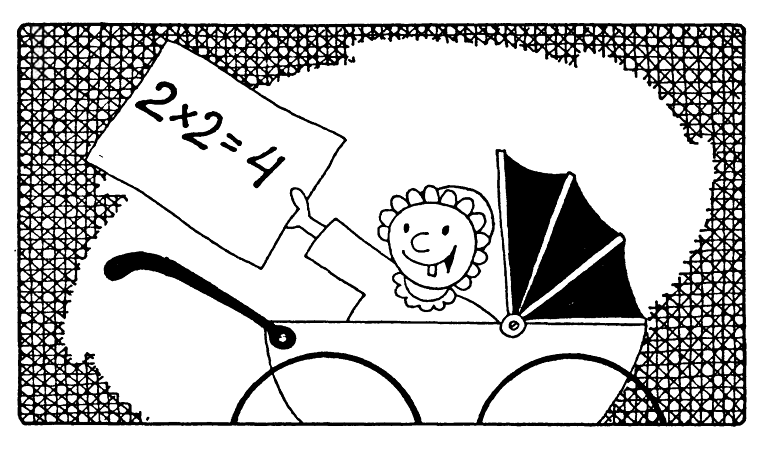
В историю Европы начало девятнадцатого века вошло как эпоха Наполеона. В историю европейской математики — как эпоха Гаусса.

Величайший немецкий математик, астроном и физик родился в городе Брауншвейге — столице одного из многочисленных германских герцогств, княжеств и королевств того времени. Его отец, садовник и фонтанный мастер, славился искусством быстро и легко считать. Эта способность перешла к сыну, говорившему позднее, что он «умел считать раньше, чем говорить».



Гаусс К. Ф.

Первый успех пришел к Гауссу в 9



лет. Школьный учитель велел ученикам найти сумму чисел от одного до сорока. Он рассчитывал надолго занять учеников этой задачей. Но Гаусс мгновенно сообразил, как сгруппировать слагаемые, и выдал ответ:

$1 + 40 + 2 + 39 + \ldots + 20 + 21 = 41 \cdot 20 = 820$. С 1791 года Гаусс, ученик гимназии, бывает во дворце герцога Брауншвейгского, развлекая придворных искусством счета. В 1795 году герцог помогает Гауссу поступить в Геттингенский университет. Гаусс чаще посещает лекции по филологии, чем по математике — однако самостоятельно, на досуге, много считает и с удивительной легкостью переоткрывает многие результаты теории чисел, с трудом доказанные другими математиками XVIII века, в том числе великим Эйлером.

В конце XVIII века Гаусс алгебраическим методом решил задачу о построении правиль-

ных многоугольников циркулем и линейкой. Еще древние греки знали, как строить правильные треугольники, пятиугольники и пятнадцатиугольники. Знали и то, что имея правильный многоугольник, можно построить новый, с удвоенным числом сторон. Но как быть, если число сторон 7 или 17?

Проводя свои арифметические опыты, Гаусс заметил, что числа 3, 9, 27, ..., 3^{16} не имеют одинаковых остатков при делении на 17. Это наблюдение позволило ему построить правильный 17-угольник. Рассуждая о произвольных n-угольниках, Гаусс свел задачу к случаю простого n, доказал, что она разрешима, если $n = 2^{2^k} + 1$. Для $k = 0$ и $k = 1$ получаются уже известные треугольник и пятиугольник. Семнадцатиугольнику соответствует $k = 2$. Число сторон следующего многоугольника этой серии равно 257. А вот правильных семи- и одиннадцатиугольников при помощи циркуля и линейки построить нельзя.

В 1801 году Гаусс публикует свои «Арифметические исследования» — многотомный труд по теории чисел. Однако немецким математикам идеи Гаусса недоступны, а публикации во Франции, где работают светила науки: Лагранж, Лаплас, Лежандр — срывается из-за банкротства книготорговца. Кстати, один из немецких экземпляров книги попал в Казань, по нему учился Лобачевский. Тогда же, в начале XIX века, Гаусс

увлекается астрономией. Благодаря его расчетам, удается открыть первые астероиды — малые планеты между Марсом и Юпитером. Санкт-Петербургская академия наук приглашает Гаусса на должность директора обсерватории. Однако, вскоре после этого обсерватория была организована в Геттингене. И Гаусс остался там, не подозревая, что через несколько лет Германия будет по частям завоевана Наполеоном, что его покровитель, герцог Брауншвейгский, погибнет в бою, а самому Гауссу предстоят несколько лет тяжелейшей жизни в условиях оккупации.

В эти же годах Гаусс много занимается геодезией и геометрией. Ему мы обязаны понятием внутренней геометрии поверхности, т.е. тех свойств, которые связаны со структурой поверхности, а не ее положением в пространстве. Например, плоский лист бумаги можно свернуть в цилиндр или в конус. А в шар нельзя — внутренняя геометрия не позволяет.

Неудивительно, что Гаусс живо интересовался исследованиями по неевклидовой геометрии. И хотя сам он ничего не публиковал, и другим не советовал — дескать, «осы из разрушенного гнезда соберутся над вашей головой» — но, вместе с тем, с величайшим интересом отнесся к работе Яноша Бойяи и Николая Лобачевского. Правда, участие Гаусса по-разному повлияло на судьбы этих математиков. Бойяи, получив отзыв от Га-

усса: «Ваши идеи верны, но хвалить Вас означало бы хвалить себя», — навсегда оставил занятия геометрией. Что касается Лобачевского, то заслуга Гаусса в международном признании русского математика несомненна.

В конце жизни Гаусса больше всего интересует физика. Ему принадлежат фундаментальные открытия в теории электричества и магнетизма.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕОЖИДАННОСТИ

Утверждения одних геометрических теорем для нас очевидны, как в теореме о равенстве накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой. А вот тот факт, что высоты в треугольнике пересекаются в одной точке, для нас неожиданность. Заметим, что древние греки — великолепные геометры — не знали этого факта.

Неожиданность математического факта придает ему оттенок красоты, родня математику с искусством. Исаак Ньютон говорил, что ощущает себя ребенком, собирающим на берегу красивые камешки, в то время, как перед ним лежит океан непознанного.

Мы хотим здесь показать несколько неожиданных геометрических результатов.

Сначала возьмем две окружности и проведем из центра каждой из них касательные к другой окружности (рис.1). Соединим точки пе-

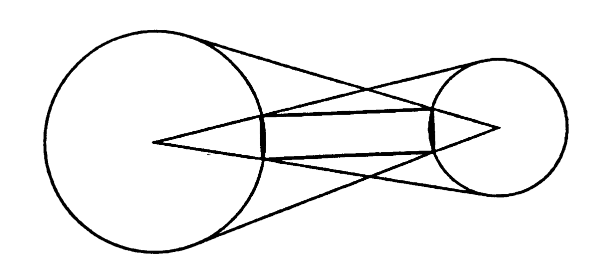


Рис. 1

ресечения касательных с окружностями. Полученный четырехугольник оказывается прямоугольником! Неправда ли, неожиданно. Неизвестно, кто первый заметил этот факт и доказал его. Вы можете попробовать сами доказать это утверждение — это не слишком трудно.

А вот автор второй неожиданности всем известен — это знаменитый Архимед. Исследуя луночки, образованные окружностями, о которых вы можете прочесть в рассказе «Гиппократовы луночки», он обнаружил, что две окружности, вписанные в половинки таких луночек (рис.2), равны. Изображенная фигура, получающаяся из полукруга удалением еще двух полукругов, напоминает средневековую алебарду, а Архимеду она напо-

минала нож, которым пользовались скорняки для выделки кож. Этот нож назывался «арбелос», поэтому эта теорема вошла в историю, как «теорема об арбелосе».

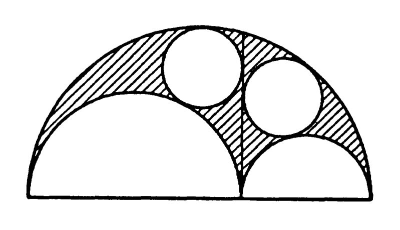


Рис. 2

Следующие два факта касаются четырехугольников, вписанных в окружности. Открытие первого принадлежит знаменитому астроному Клавдию Птолемею, жившему в Александрии во II веке н.э. Он обнаружил, что сумма произведений длин противоположных сторон вписанного четырехугольника равна произведению длин его диагоналей. Частные случаи этой теоремы оказались очень полезными Птолемею при составлении таблиц для астрономических расчетов.

Автором второго неожиданного факта о вписанном четырехугольнике стал Исаак Ньютон. Он обнаружил, что центр окружности, вписанной в четырехугольник, лежит на прямой, проходящей через середины его диагоналей (рис.3).

Геометрия — наука, давшая людям возможность находить площади и объемы, пра-

вильно чертить проекты зданий и машин. Но в ней много и таких вот красивых неожиданностей — математических жемчужин. И это делает занятия геометрией не только полезным, но и приятным делом.

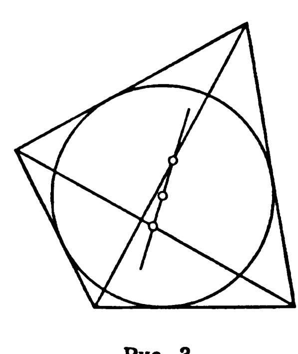


Рис. 3

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Знаменитая **теорема Пифагора** звучит так: площадь квадрата, построенного на гипотенузе (т.е. большей стороне) прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах (меньших сторонах). Про картинку, иллюстрирующую эту теорему (рис.1), сложена шутливая поговорка: «Пифагоровы штаны на все стороны равны».

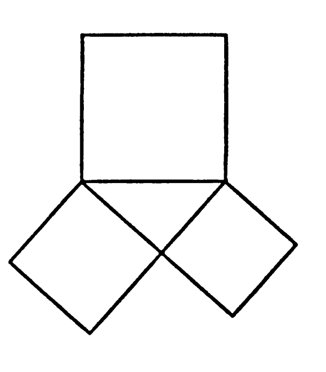


Рис. 1

Изучение вави-

лонских клинописных таблиц и древнекитайских рукописей показало, что утверждение этой теоремы было известно задолго до Пифагора. Заслуга греческого ученого состояла в том, что он открыл доказательство этой теоремы.

Сейчас известно более трехсот доказательств теоремы Пифагора. Самое наглядное из них приведено на рис. 2. Посмотрите внимательно на два квадрата и вам все станет ясно. Индусы к этому чертежу добавляли лишь одно слово: «Смотри!»

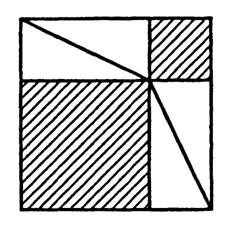
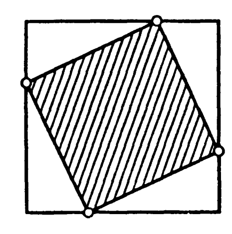



Рис. 2

Используя эту теорему, Пифагор и его ученики описали все тройки целых чисел, которые могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника. Многие из них были известны и ранее — они обнаружены на клинописных табличках, дошедших до нас из древнего Вавилона.

Позднее выяснилось, что если на сторонах прямоугольного треугольника построить не квадраты, а произвольные подобные между собой фигуры, то сумма площадей фигур,

построенных на катетах, равна площади фигуры, построенной на гипотенузе.

Теорему Пифагора можно сформулировать и так: «Квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов длин смежных сторон этого прямоугольника.» Если перейти в трехмерное пространство, то нетрудно доказать и такое обобщение теоремы Пифагора: «Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин его ребер, выходящих из одной вершины».

ПИФАГОР И ПИФАГОРЕЙЦЫ

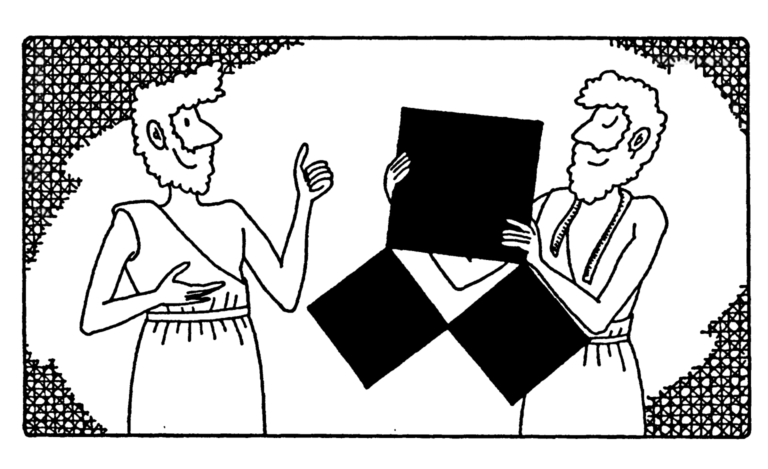
Пифагор родился в шестом веке до н. э. на греческом острове Самос. По сохранившимся преданиям, он много путешествовал: жил в Египте, Вавилоне, побывал даже в далекой Индии. Потом он поселился на юге нынешней Италии, где основал общество философов — **пифагорейский союз.**



Пифагор

Пифагорейцы много занимались наукой, особенно математикой. Самой знаменитой из опубликованных ими те-

орем стала теорема Пифагора, гласящая, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на его гипотенузе. Получающуюся при этом картинку школьники с давних пор называли «пифагоровыми штанами».



Пифагорейцы изучили варианты, в которых величины всех сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами. Вообще, они придавали числам очень большое значение, считая, что через них можно выразить все закономерности в мире. И сами числа они наделяли разнообразными свойствами. Например, они считали, что 5 символизирует цвет, 6 — холод, 7 — разум, здоровье и свет, 8 — любовь и дружбу, и так далее.

Числа, равные сумме всех своих делителей, такие как 6, 28, 496, 8128, они считали

совершенными. А пары чисел, в которых каждое число равнялось сумме делителей другого, они называли дружественными. Пифагорейцы разделили числа на четные и нечетные и заметили, что если складывать последовательно нечетные числа: 1+3+5+7..., то после каждого сложения будут получаться полные числовые квадраты: 1,4,9,16...



К математическим наукам пифагорейцы относили арифметику, геометрию, астрономию... и музыку! Они установили, что высота звучания струны зависит от ее длины, то есть опять же от числа! И создали первую математическую теорию музыки.

В качестве символа пифагорейцы избрали пятиконечную звезду, хотя сам Пифагор го-

ворил, что из всех фигур прекраснейшее — круг, а из тел — шар. В то же время среди геометрических теорем пифагорейцев нет теоремы о круге. Они занимались в основном многоугольниками. Например, они умели строить многоугольник, подобный одному из двух заданных многоугольников и одновременно равновеликий второму.

ГИППОКРАТОВЫ ЛУНОЧКИ

Первое дошедшее до нас математическое исследование — это отрывок сочинения, посвященного квадратуре круга. Его автор — греческий математик V века до н.э. Гиппократ Хиосский (не путайте его со знаменитым врачом Гиппократом, жившим намного позже).

Квадратура круга — неразрешимая проблема, и естественно, что Гиппократ с ней не справился. Удивительно другое: он сумел обнаружить три фигуры, ограниченные дугами окружностей, для которых удается построить равновеликий квадрат при помощи циркуля и линейки! Эти квадрируемые фигуры названы в его честь гиппократовыми луночками.

Самая простая конструкция приведена на рис.1: на сторонах равнобедренного прямоугольного треугольника построены полукруги. При этом дуги окружностей вырезают

две одинаковых луночки (полумесяца). По обобщенной теореме Пифагора сумма площадей меньших полукругов равна площади большего полукруга. Вычитая из этого равенства площадь сегментов, закрашенных черным, получим, что сумма площадей луночек равна площади треугольника. Значит, каждая луночка по площади в два раза меньше исходного треугольника, а квадрат такой площади построить совсем легко (рис.2).

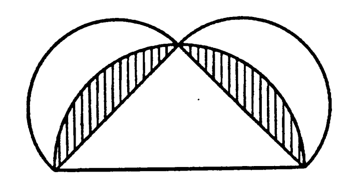


Рис. 1

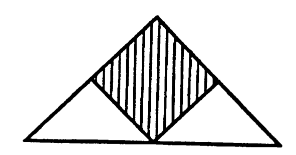


Рис. 2

Несколько сложнее описать другие гиппократовы луночки. Но еще более сложная задача, над которой много веков бились математики — построить квадрируемые луночки, не найденные Гиппократом. Только в XIX веке к трем луночкам Гиппократа было добавлено еще две. Других луночек, кроме этих пяти, построить нельзя — это доказано в XX веке.

ПАРКЕТЫ

Паркет, как мы его представляем, — замощение плоскости некоторыми фигурами. Легко замостить плоскость одинаковыми трегольниками (рис.1). А четырехугольниками? Мы часто видим на полу паркеты из

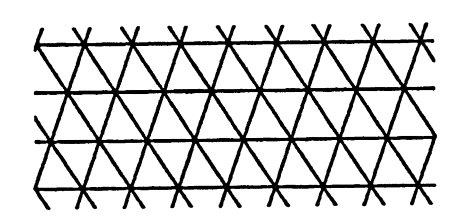


Рис. 1

прямоугольников (рис.2 и 3), а можно ли замостить плоскость одинаковыми четырехугольниками произвольной формы? Оказы-

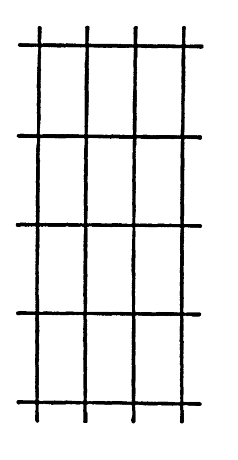


Рис. 2

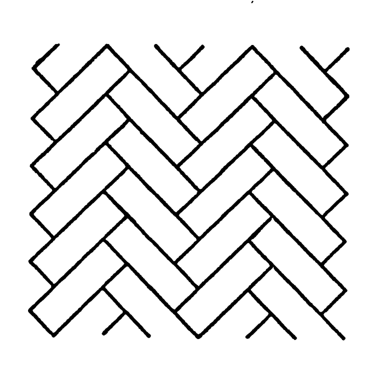


Рис. 3

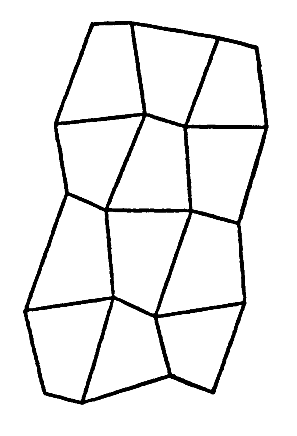


Рис. 4

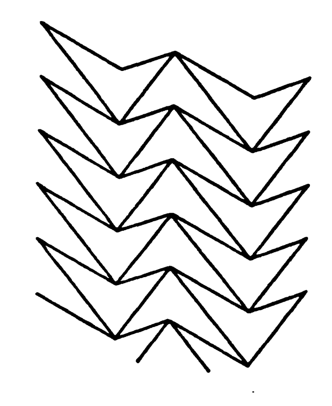


Рис. 5

вается, это возможно. На рис.4 и 5 показано, как это делается для выпуклых и невыпуклых четырехугольников.

В случае пятиугольников замощение возможно не всегда. Например, правильными пятиугольниками замостить плоскость не-

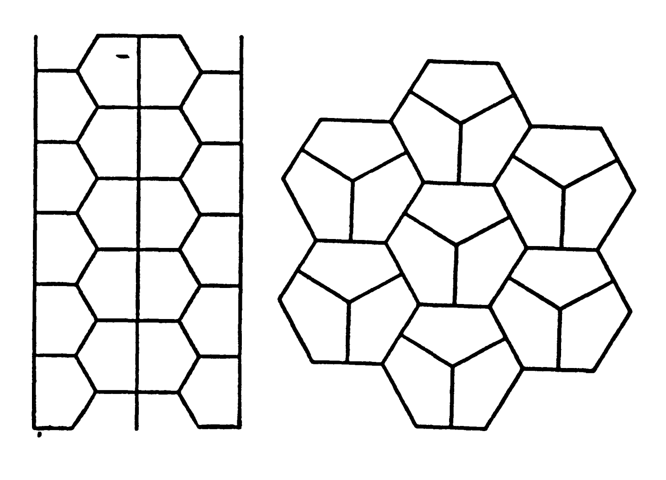


Рис. 6

Рис. 7

возможно. Примеры замощения плоскости одинаковыми пятиугольниками показаны на рис. 6 и 7.

Правильными шестиугольниками можно замостить плоскость так, как на это указывают пчелы в своих сотах (рис.8). Если же одновременно менять одинаковым образом шестиугольники, то можно прийти к очень интересным паркетам.

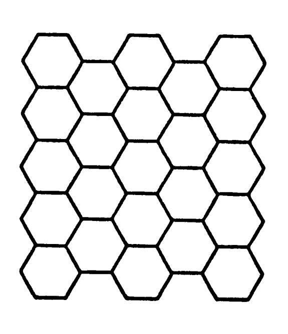


Рис. 8

Если рассматривать паркеты из многоугольников с большим числом сторон, то следует заметить, что там уже не существует паркетов из правильных многоугольников.

Наверное, вы обращали внимание на покрытие дорог и площадей (рис. 9), которое образует прочную конструкцию. Придуманы и другие паркеты для дорог.

Но обратимся к паркетам, в которые входят только правильные многоугольники. Паркет на рис. 10 составлен из одинаковых

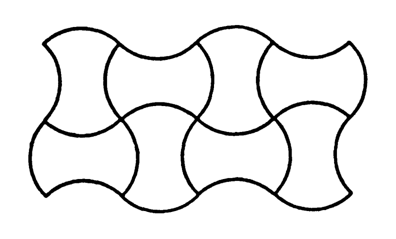


Рис. 9

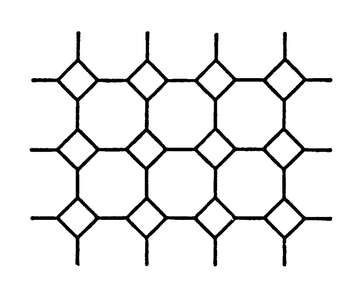


Рис. 10

восьмиугольников и квадратов. Он обладает еще одним замечательным свойством. Возьмем два экземпляра такого паркета. Выберем на каждом из них по вершине и положим один паркет на другой так, чтобы эти вершины совпали. Тогда, оказывается, можно повернуть верхний паркет вокруг этой вершины так, что оба паркета совпадут. Паркеты из правильных многоугольников, обладающие этим свойством, называются правильными паркетами. Правильных паркетов совсем немного. Во-первых, это паркет из правильных треугольников. Таким был бы паркет на рис.1, если бы выбранный треугольник был правильным. Паркет на рис.2 становится правильным, если в качестве прямоугольника взять квадрат. Правильным является и паркет

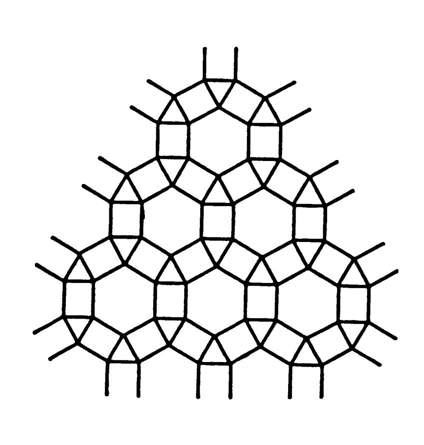


Рис. 11

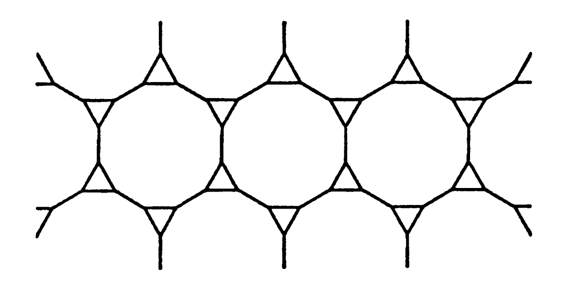


Рис. 12

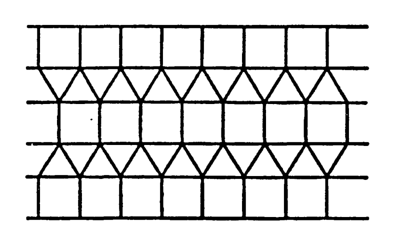


Рис. 13

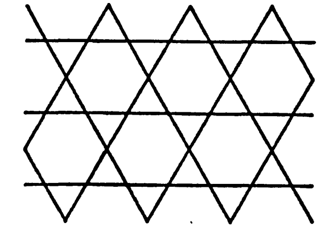


Рис. 14

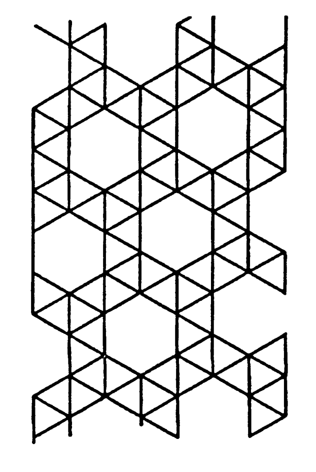


Рис. 15

Рис. 16

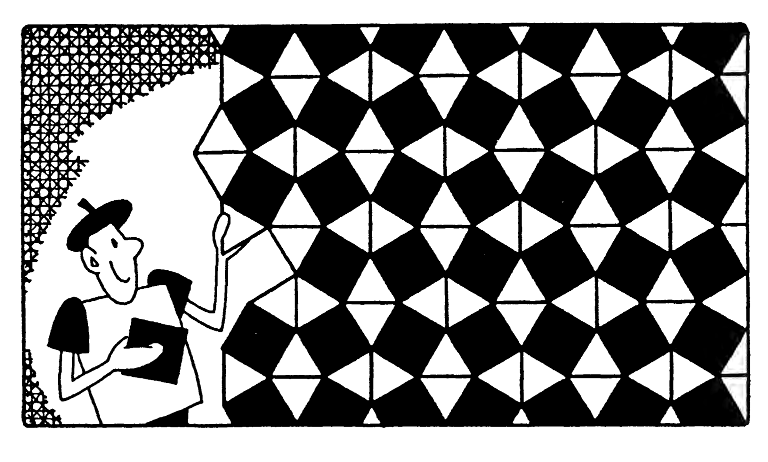


Рис. 17

из правильных шестиугольников (рис.8). А что еще? Есть и еще восемь правильных паркетов (рис. 10—17). Итак, всего 10 правильных паркетов.

ИЛЛЮЗИИ

Приступая к решению геометрической задачи, как правило, первым делом строим чертеж. В древние времена решение на этом и заканчивалось. Все доказательства сводились к одному слову: «Смотри».

Но всегда ли мы можем доверять нашему зрению? Оказывается, нет! Ученые придумали и построили много обманчивых картинок, наглядно демонстрирующих, сколь ограничены возможности наших глаз.

На рис.1 изображена Т-образная фигура.

Кажется, что вертикальная линия длиннее горизонтальной. В действительности они имеют одинаковую длину — это можно проверить с помощью линейки. На рис. 2 изображена другая Т-образная фигура, у которой обе линии кажутся равными по длине. На самом же деле вертикальная линия короче.

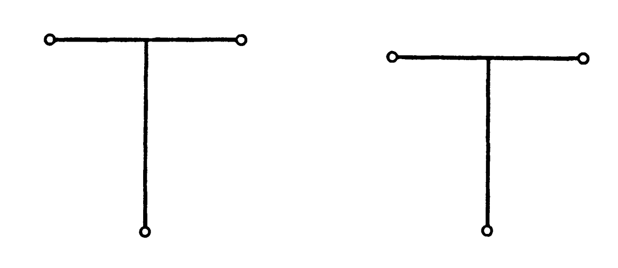


Рис. 1 Рис. 2

Стрелки на концах отрезка тоже создают иллюзию искажения длины. На рис. 3 горизонтальные отрезки, как ни странно, равны. А точка на рис. 4 делит отрезок пополам.

На рис. 5 верхнее основание нижней трапеции кажется короче верхнего основания верхней трапеции. Попутно заметим, что,

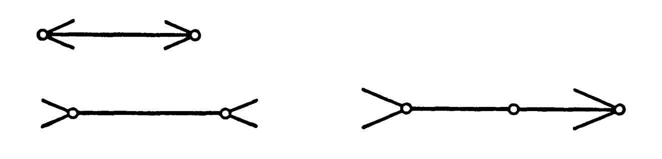
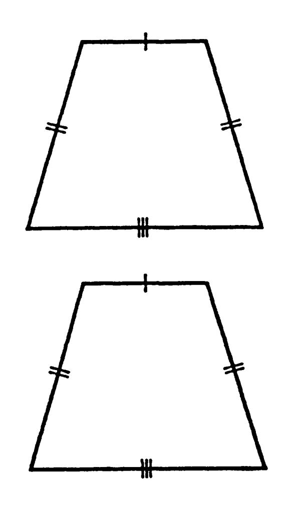


Рис. 3 Рис. 4


Рис. 5

как ни трудно в это поверить, максимальная ширина каждой из трапеции превосходит ее высоту.

На рис.6 поразительную иллюзию создают углы — тупой и острый: диагонали *AB* и *AC* двух параллелограммов равны, хотя диагональ *AC* кажется гораздо короче.

Удивительное впечатление производит также картинка с двумя параллельными пересекаемыми наклонной прямой. Если правую наклонную линию на рис.7 продолжить, то она пересечется с левой в ее верхнем конце. Кажущаяся точка пересечения расположена несколько правее.

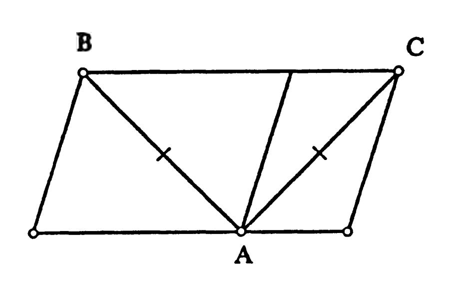


Рис. 6

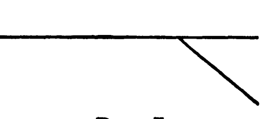


Рис. 7

Иллюзию, изображенную на рис.8, первым описал Иоганн Цельнер. Он случайно заметил этот эффект на рисунке ткани. Вертикальные линии не кажутся параллельными.

Похожий пример изображен на рис.9. Вертикальные прямые кажутся здесь изогнутыми на фоне сходящихся наклонных прямых.

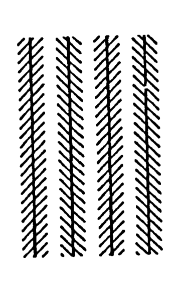


Рис. 8

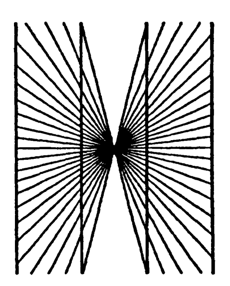
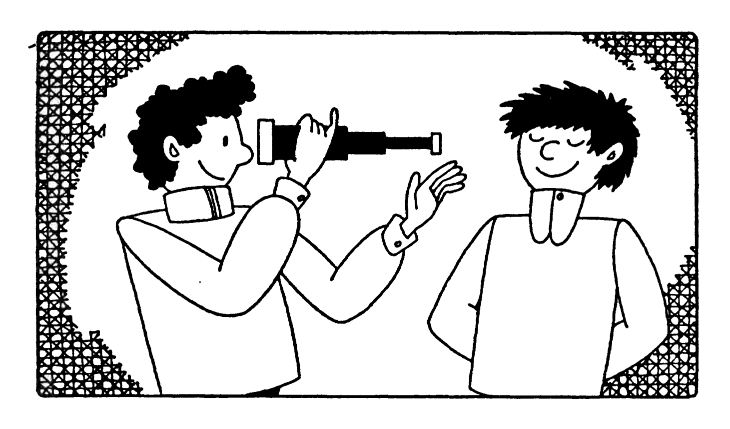


Рис. 9

Геометрические иллюзии создают богатые возможности для художников, фотографов, модельеров. Однако инженерам и математикам приходится быть осторожными с чертежами и подкреплять «очевидное» точными расчетами.

ПЕРСПЕКТИВА

Рисовать люди начали раньше, чем писать и считать. Сохранились наскальные рисунки первобытных людей, да и первые тексты были написаны иероглифами — картинками, они напоминали современные комиксы. Путь совершенствования искусства художников был длинным и сложным. Лишь в эпоху Возрождения люди постигли законы правильной передачи пространства.



Мы знаем из опыта, что при удалении предмета его видимые размеры уменьшаются, уходящие вдаль рельсы железной дороги кажутся сходящимися в одной точке на горизонте, круглое озеро, колесо автомобиля представляются в виде овалов. Задача состояла в том, чтобы сформулировать законы изображения пространственных фигур такими, какими они видны из одной неподвижной точки.

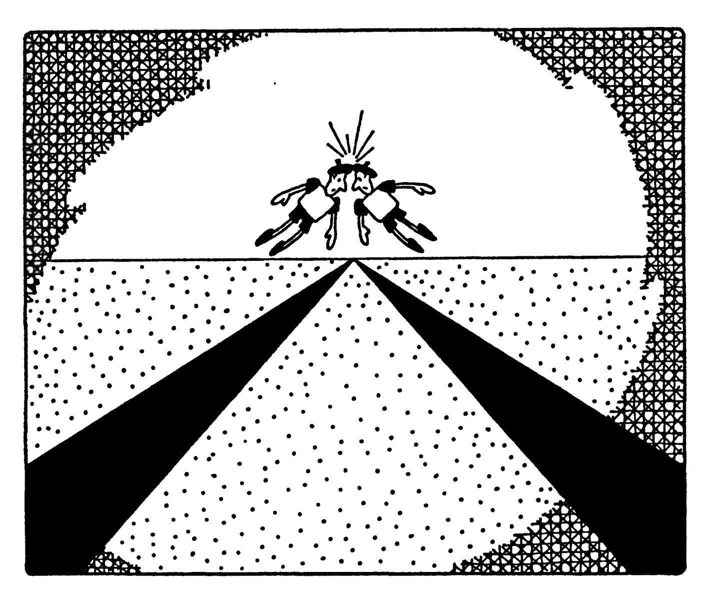
Начиная с XV века художники, архитекторы и ученые разрабатывали точные законы перспективы. Среди них Леонардо да Винчи, Альбрехт Дюрер, Ф.Брунилески, П.Унчелло, Пьеро делла Франческо и другие.

В чем же состоят эти законы? Во-первых, на картине следует нанести линию горизонта. Она не обязана присутствовать в окончательном варианте картины, поскольку она может быть загорожена изображениями различных предметов, людей, деревьев. Во-вторых, все параллельные между собой прямые должны пересекаться в одной точке, если эти прямые не параллельны плоскости картины. В случае параллельности плоскости картины они изображаются параллельными прямыми. Если параллельные прямые параллельны плоскости Земли, то их точка пересечения находится на линии горизонта (мы здесь не утверждаем, что Земля плоская, а лишь отмечаем, что она такой кажется, когда мы стоим на ней, а не смотрим на нее из кабины космического корабля).

На известной картине А.Дюрера сохранены линии, с помощью которых художник правильно передал перспективу. Само слово происходит от латинского слова «перспикио» — ясно вижу.

ГЕОМЕТРИЯ БЕЗ УГЛОВ И РАССТОЯНИЙ

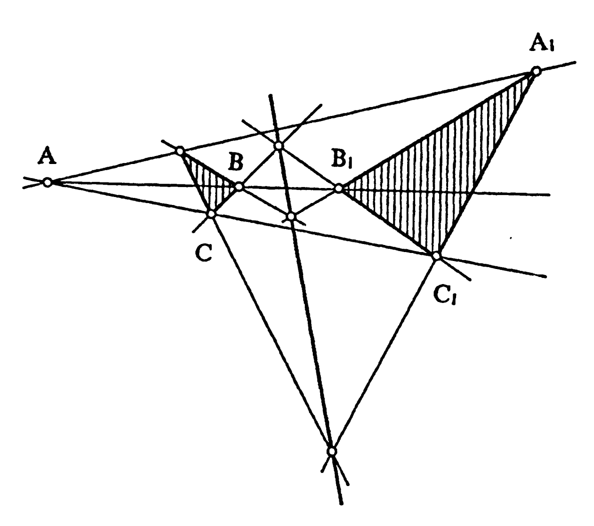
Теорией перспективы занималось немало математиков. Их исследования привели к созданию математической науки — проективной геометрии. Ученые отметили, что на картинах параллельные прямые изображаются либо параллельными, либо пересекающимися, причем все прямые, параллельные друг



другу, пересекаются в одной точке. Ясно, что на картинах соотношения длин не сохраняются — более далекие столбы рисуются меньшими, чем близкие, изменяются углы — прямоугольники становятся просто выпуклыми четырехугольниками. Но, ока-

зывается, что кое-что сохраняется при перенесении действительности на картину. Если точка лежала на прямой, то и на картине она будет лежать на прямой, если две параллельные прямые имели общую точку, то и на картине они будут иметь общую точку.

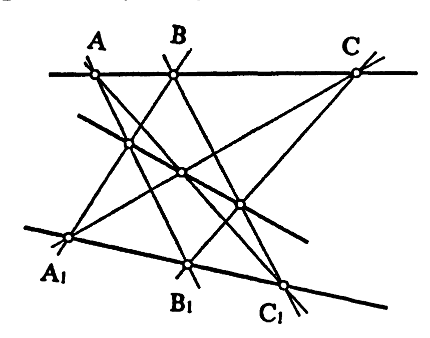
Но этого слишком мало, — скажете вы. Оказывается, что не так уж мало. Приведем две теоремы проективной геометрии. Факты, сформулированные в этих теоремах, оказываются справедливыми и после того, как мы перерисуем соответствующий чертеж, глядя на него под другим углом зрения.



Теорема Дезагра. Пусть даны три прямые, пересекающиеся в точке O. Пусть на одной прямой лежат точки A и A_1, на другой — B и B_1, на третьей C и C_1. Тогда точка пересечения прямых AB и A_1B_1, AC

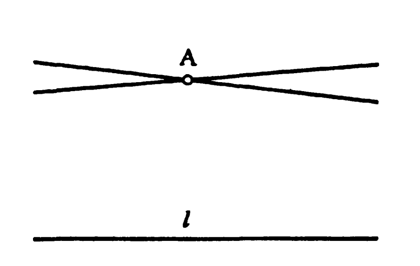
и A_1C_1, BC и B_1C_1 лежат на одной прямой (см. рис.).

Теорема Паппа. Пусть на одной прямой даны точки A, B и C, а на другой — точки A_1, B_1 и C_1, тогда точки пересечения прямых AB_1 и A_1B, AC_1 и A_1C, BC_1 и B_1C лежат на одной прямой (см. рис.).



НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

В историю математики Н.И.Лобачевский вошел как первооткрыватель неевклидовой геометрии. Это непротиворечивая геометрическая теория, в которой евклидов постулат о параллельных заменен утверждением, на первый взгляд абсурдным: «В плоскости через точку A, не принадлежащую прямой l, можно провести более одной прямой, не пересекающейся с l (см. рисунок). История науки знает несколько примеров «абсурдных»



идей, которые переворачивали все представления о мире — вспомним Коперника и Эйнштейна. Кстати, сам Альберт Эйнштейн признавал, что его теория относительности основана на исследованиях математиков XIX века, в том числе и на геометрии Лобачевского.

Николай Иванович Лобачевский родился в 1792 году в Нижнем Новгороде. Его отец, Иван Максимович, был уездным землемером. Мать, Прасковья Александровна, занималась домашним хозяйством, растила троих сыновей — Александра, Николая и Алексея.

В начале XIX века в России было открыто несколько новых университетов, в том числе Казанский. В 1817 году Лобачевский заканчивает этот университет и остается работать в звании магистра — помощником профессора. В 1813 году он пишет первую научную работу по теории многочленов. В 1814 г. Лобачевский



Лобачевский Н. И.

становится преподавателем университета, читает лекции по математике и механике, пишет учебники. В это же время он начинает серьезно заниматься вопросом обоснования евклидовой геометрии.

Пожалуй, только одно место в геометрии Евклида с самого начала выглядело не вполне ясным — это пятый постулат. Многие ученые пытались вывести его из других постулатов и аксиом, но единственное, что им удавалось, — заменить тяжеловесную формулировку Евклида на более короткие и наглядные. В XVIII веке общепринятой была формулировка: «через данную точку на плоскости проходит ровно одна прямая, параллельная данной прямой».

Многие математики пытались найти доказательство от противного: предположить, что пятый постулат неверен и вывести из этой гипотезы следствие, противоречащее остальным постулатам и аксиомам. Желаемое противоречие получалось, но... при проверке в рассуждениях всякий раз обнаруживались логические ошибки.

Лобачевский пошел тем же путем — заменил постулат Евклида своим утверждением. Теоремы новой геометрии были ошеломляюще непохожи на старые, но противоречия не обнаруживалось. И тогда Лобачевский решился на смелый и даже рискованный шаг: объявить новую геометрию непротиворечивой! 23 февраля 1826 года Лобачев-

ский прочитал публичный доклад о своих исследованиях. Этот день считается днем рождения неевклидовой геометрии.

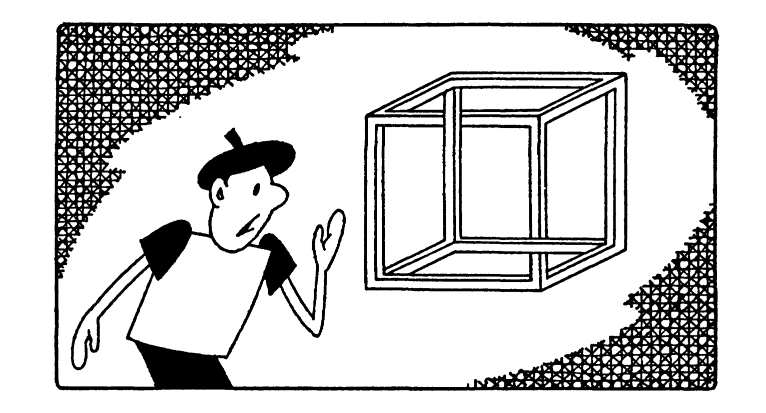
С периодом разработки «воображаемой геометрии» совпало другое значительное событие в жизни Лобачевского. В 1827 году он стал ректором Казанского университета и оставался на этой должности до 1846 года.

Геометрия Лобачевского не была признана при жизни ученого. Среди математиков с мировым именем только Гаусс оценил значение работ Лобачевского. Только в 60-х годах XIX века неевклидовой геометрией заинтересовалось новое поколение математиков. В 1868 году непротиворечивость геометрии Лобачевского была доказана итальянцем **Э.Бельтрами**.

НЕВОЗМОЖНЫЕ ОБЪЕКТЫ

Взгляните на рисунок шведского художника **О.Ройтерсверда** «Спуски и подъемы» (рис.1). На рисунке строго соблюдены законы перспективы, о которых вы могли прочесть в предыдущем рассказе. Однако взгляните на лестницу. Если идти по ней, то придется все время подниматься вверх, или спускаться вниз, двигаясь по кругу. Каждый отдельный кусочек рисунка не вызывает удивления, а весь рисунок в целом дает нам **невозможный объект**.

О.Ройтерсверд не был первым, заметив-



шим такой эффект. В 1958 году французский математик Роджер Пенроуз обнародовал свой «невозможный треугольник». Глядя на него, видишь, что он составлен из трех прямоугольных брусков, каждые два из которых перпендикулярны. Но ведь такого не может быть!

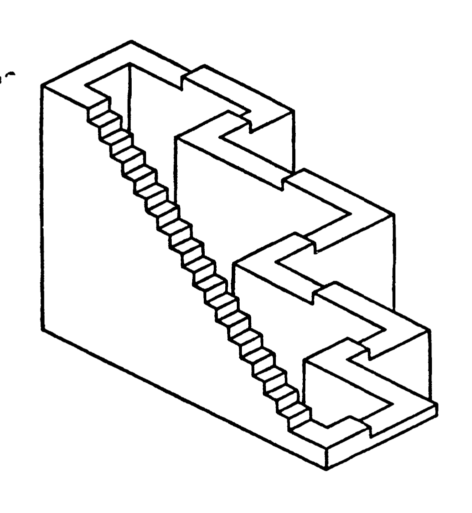


Рис. 1

Здесь мы приводим еще несколько рисунков Оскара Ройтерсверда. На них трудно определить, сколько же зубцов у вилки (рис. 2) или сколько брусочков изображено на рис. 3.

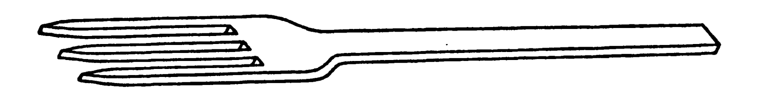


Рис. 2

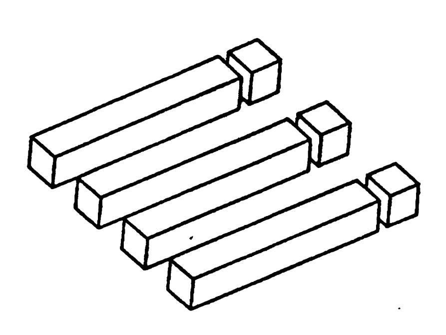


Рис. 3

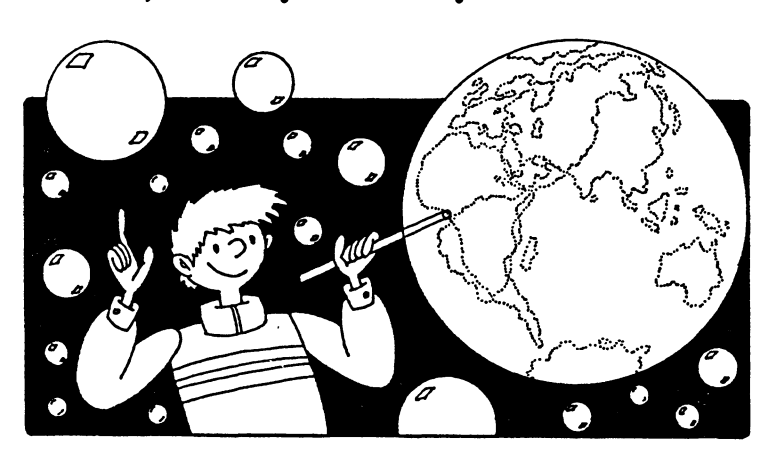
Невозможные объекты частые гости картин и у знаменитого нидерландского художника Мориса Эшера.

СФЕРА

Сферой называют поверхность шара. Ее нетрудно получить с помощью мыльной воды и соломинки: опустим соломинку в воду, по-

том вытащим и подуем в нее. И вот уже летит, переливаясь всеми красками шарик с тончайшими стенками — сфера.

Поскольку Земля имеет форму шара, то мы живем на сфере, правда довольно сильно изборожденной горами и оврагами. Но из космоса она представляется правильным шаром. Не всякому удастся побывать в космосе но увидеть земной шар со стороны может всякий, взглянув на глобус.



У сферы есть замечательное свойство: все ее точки находятся на одном и том же расстоянии от некоторой точки, находящейся внутри нее — центра сферы. Если разрезать сферу плоскостью, то получим окружность. Любопытно, что сфера — единственная поверхность, при пересечении которой плоскостью всегда получается окружность. Если пересекающая плоскость проходит через центр сферы, то полученная окружность будет са-

мой большой и поэтому называется большим кругом. Большими кругами на земном шаре будут, в частности, экватор и меридианы. Большие круги на поверхности Земли используют штурманы кораблей и самолетов потому, что кратчайший путь из одного пункта в другой проходит по соединяющему их большому кругу.

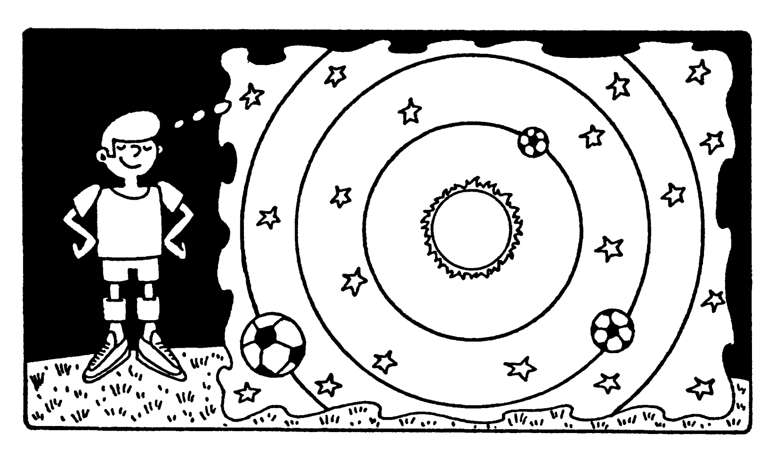
Сфера обладает еще одним важным свойством: из всех сосудов одинаковой вместимости у сферического наименьшая поверхность. Именно поэтому резервуары для хранения нефти и газа имеют сферическую форму, ведь при этом экономится материал оболочки этих резервуаров. Сферические оболочки окружают антенны радиолокаторов, стоящих на научных судах, следящих за полетом наших космических кораблей и спутников, и принимающих оттуда важную информацию.

ШАР

Шар — уникальное геометрическое тело. Оно выделяется среди всех тел того же объема тем, что имеет наименьшую площадь поверхности. Жидкости и газы стремятся к тому, чтобы занимаемый ими объем имел наименьшую поверхность. Посмотрите на маленькую капельку воды на промасленной бумаге — она имеет форму шара. Если ка-

пелька побольше, то она сплющивается под действием собственной тяжести, а очень большая капля рассыпается на несколько маленьких. Этим свойством пользуются и при изготовлении охотничей дроби: расплавленный свинец льют через тонкие отверстия. В полете струя разбивается на капли, которые, падая в воду, застывают в виде одинаковых шариков.

Да и воздушный шарик имеет свою форму по той же причине. Шаровая форма мяча доставляет ему еще одно замечательное свойство — он одинаков со всех сторон и может катиться в любую сторону. Наверное этим во многом вызван успех таких игр как футбол, волейбол, ватерполо, гандбол, теннис, пинг-понг.



Это свойство шара используется не только в играх, но и в технике. Вам, наверное, доводилось видеть шарикоподшипник: не-

сколько шариков помещены в обойму из двух колец. Кольца легко перекатываются по шарикам поэтому шарикоподшипники ставят на осях велосипедов, мотоциклов, автомашин, и не только на осях колес, но и во всех местах, где происходит вращение. В обычном велосипеде можно насчитать не менее 11 шарикоподшипников.

Ну, а самое-самое главное, почему интересно изучение шаров то, что и Земля, и Солнце и Луна, и остальные планеты имеют форму шара.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Многогранники — тела, ограниченные плоскими многоугольниками, — окружают нас повсюду: ведь самая популярная форма современного здания, радиоприемника, телевизора, шкафа — параллелепипед. Среди разнообразных форм многогранников выделяют **правильные** многогранники — те, которые построены из одинаковых многоугольников, причем в каждой вершине сходится одинаковое количество таких многоугольников.

Еще в Древней Греции были описаны все правильные многоугольники. Их пять: тетраэдр (четырехгранник — от греческого «тетра», т.е. четыре и т.д.), составленный из четырех правильных треугольников, куб или гексаэдр (шестигранник — от греческо-

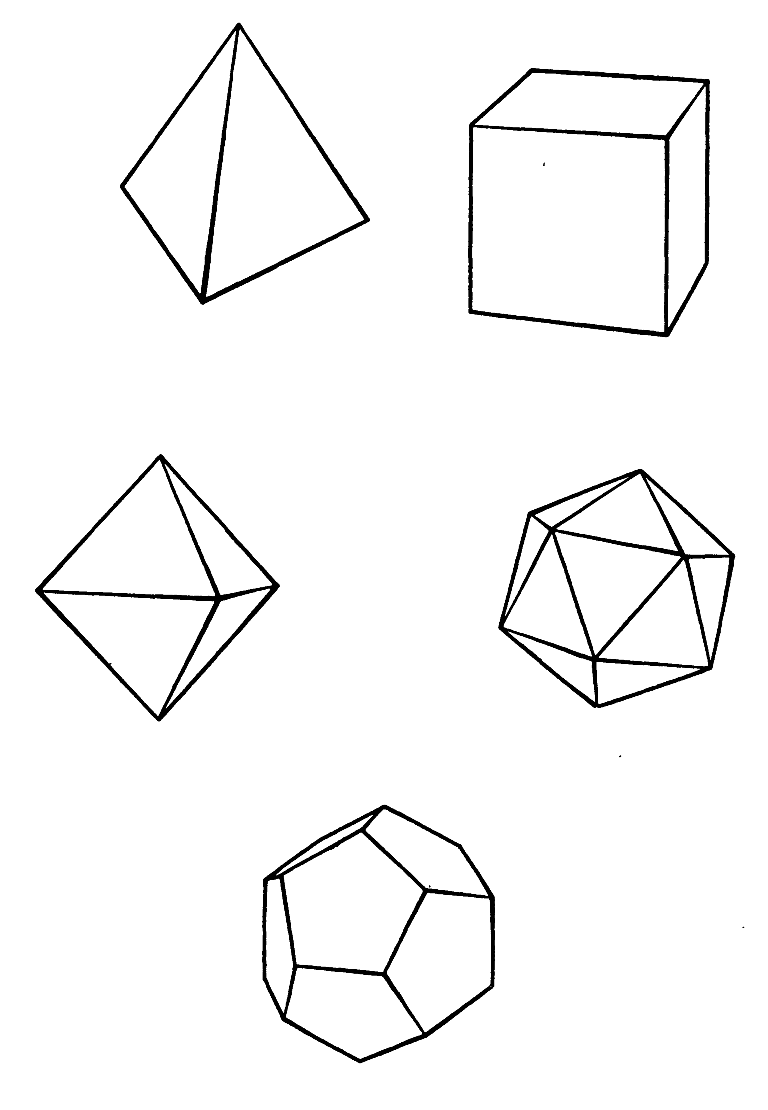


Рис. 1

го «гекса», т.е. шесть), составленный из шести квадратов, октаэдр (восьмигранник — от греческого «окта», т.е. восемь), составленный из восьми правильных треугольников, икосаэдр (двадцатигранник — от греческого «икос», т.е. двадцать), составленный из двадцати правильных треугольников, и загадочный додекаэдр (двенадцатигранник — от греческого «додека», т.е. двенадцать), составленный из двенадцати правильных пятиугольников (рис.1).

Эти многогранники носят название «платоновых тел», по имени древнегреческого философа **Платона** (428—348 до н.э.), в учении которого они играли важную роль. Тетраэдр символизировал огонь, куб — землю, октаэдр — воздух, икосаэдр — воду, а додекаэдр — Вселенную. Первые четыре многогранника были хорошо известны и до Платона, а додекаэдр был открыт философами школы Платона. Это открытие они держали в строжайшей тайне. Существует легенда об ученике Платона Гиппазе, погибшем в море во время шторма, учиненного олимпийскими богами, за разглашение этой тайны.

Интересен **«закон взаимности»** для правильных многогранников. Если соединить отрезками центры соседних граней правильного многогранника, то эти отрезки станут ребрами другого правильного многогранника: у куба — октаэдра, а у октаэдра — куба; у икосаэдра — додекаэдра, а у додекаэдра —

икосаэдра; а у тетраэдра — снова тетраэдра (рис.2).

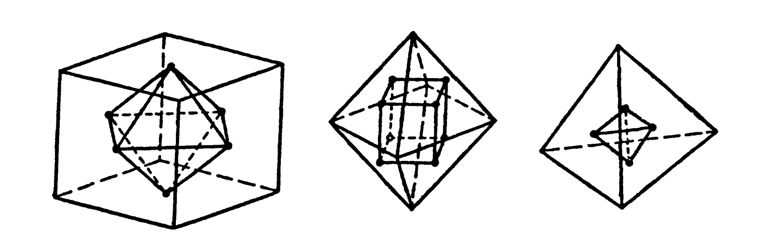


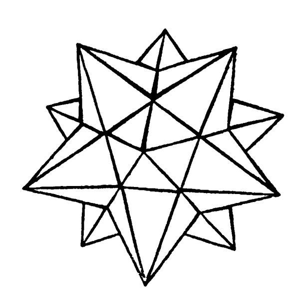
Рис. 2

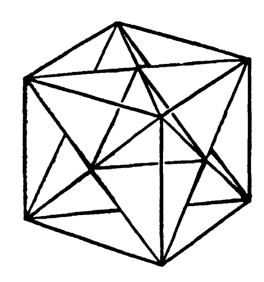
Правильные многогранники привлекают совершенством своих форм, полной симметричностью, что дало возможность венгерскому инженеру Эрне Рубику создать свой зна-

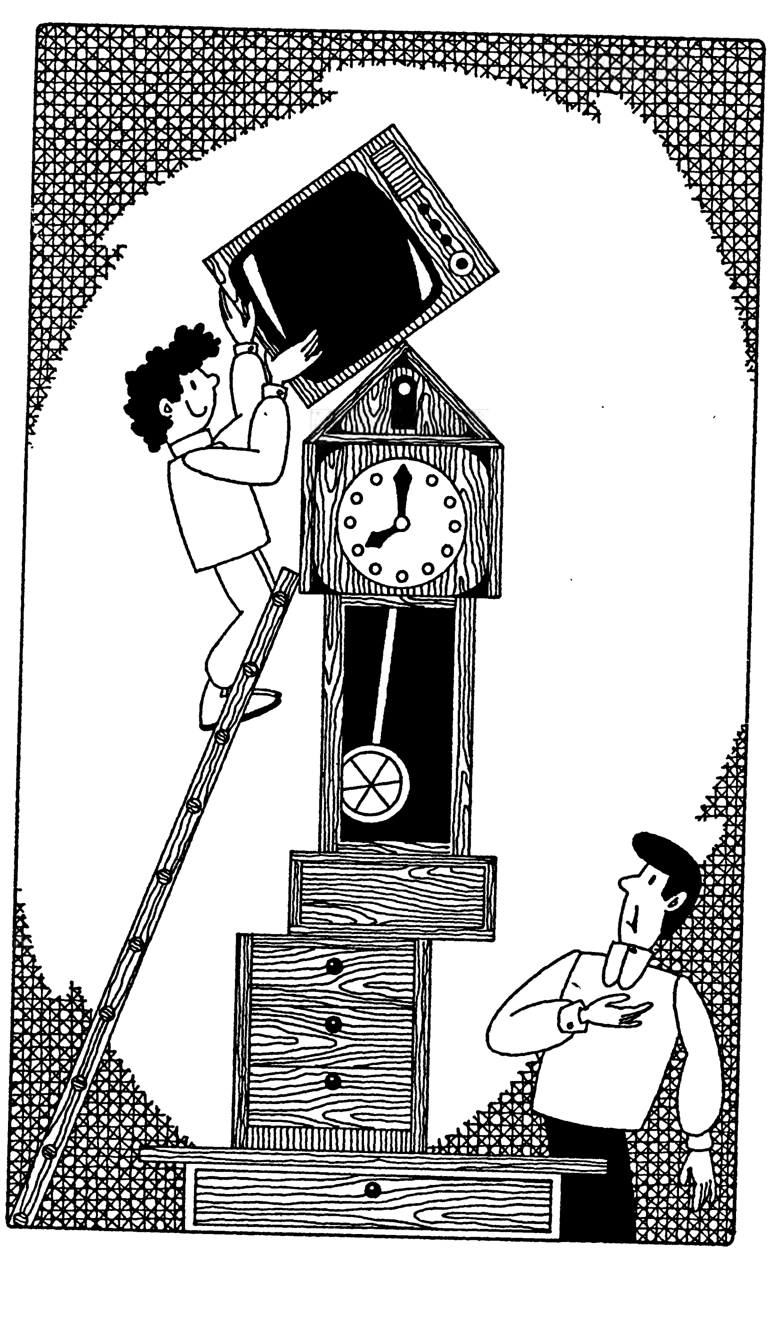
менитый «кубик Рубика», а затем и аналогичные головоломки из остальных платоновых тел.

Если использовать не только обычные правильные многоугольники, но и звездчатые многоугольники и разрешить им пересекаться, то можно получить очень красивые звездчатые правильные многогранники. В 1810 году французский математик Пуансо построил четыре правильных звездчатых многогранника: малый звездчатый додекаэдр, большой звездчатый додекаэдр, большой додекаэдр и большой икосаэдр. Два из них знал И.Кеплер (1517—1630) (рис.30), а в 1812 году французский математики О.Коши доказал, что кроме пяти «платоновых тел» и четырех «тел Пуансо» больше нет правильных многогранников.

Кроме правильных многогранников существует большое число полуправильных мно-







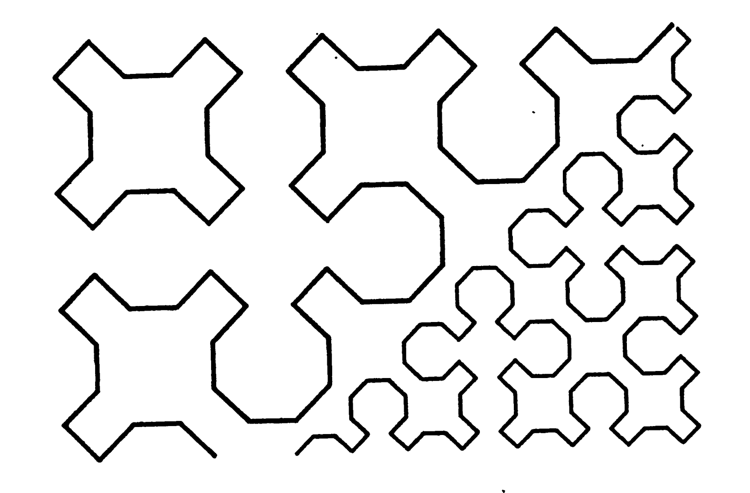
гогранников, которые носят название «тел Архимеда», поскольку он первым их описал. Это тела, составленные из многоугольников двух видов, причем в каждой вершине сходится одно и то же число многоугольников каждого вида. Примером такого многогранника является футбольный мяч, часто появляющийся на экранах телевизоров. Он составлен из пяти-шестиугольников.

ЛИНИЯ

Мы часто рисуем различные линии, в школе изучаем некоторые из них, например, прямую и окружность, знаем о существовании других линий — спиралей, овалов,... Но что такое линия?

Строгое определение понятия «линия» появилось совсем недавно, и оно очень непросто. Евклид в своих «Началах» определял линию, как «длину без ширины»; при этом он не считал, что линия состоит из точек, а писал, что линия — это то место, где располагаются точки. Отсюда и пошло выражение: геометрическое место точек. Конечно же, такое определение не могло устроить математиков, стремящихся к строгому определению всех понятий, с которыми они имеют дело.

После того, как Рене Декарт ввел в арсенал математиков систему координат, появилась возможность сформулировать опреде-



ление линии, как траектории движущейся точки. Пусть точка движется по плоскости, тогда в каждый момент времени t можно определить ее координаты на этой плоскости: $x = f(t)$, $y = g(t)$. Наоборот, задав функции $f(t)$ и $g(t)$, получим некоторую линию на плоскости. Например, $x = 1 + 3t$, $y = 2 - t$ дадут нам точки прямой линии.

Однако математики придумали такие функции $f(t)$ и $g(t)$, для которых пробегаемое множество точек не отвечает нашим интуитивным представлениям о линии. Итальянский математик Д.Пеано нашел функции, для которых это множество содержит все точки некоторого квадрата. Построение такой линии довольно красиво. Она получается, как предельное состояние кривых, изображенных на рисунке.

СПИРАЛИ

Спиралями называют такие линии, которые многократно обходят некоторую точку плоскости. Простейшей спиралью является спираль Архимеда (рис.1), у которой рас-

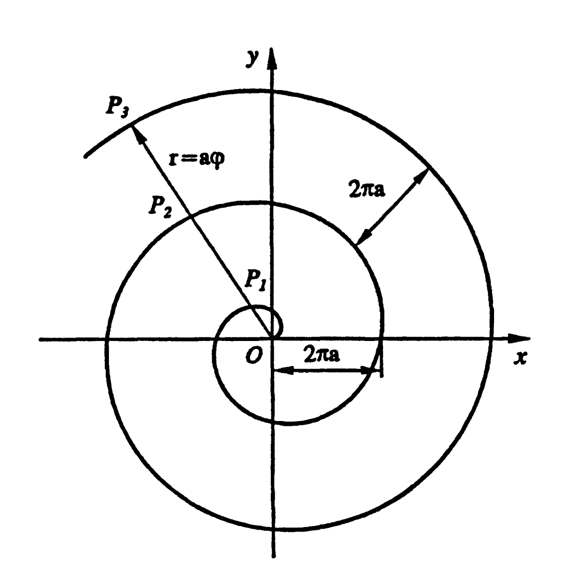


Рис. 1

стояние между витками имеет всюду одинаковую величину. По спирали Архимеда располагается звуковая дорожка на грампластинке, ее можно увидеть в механизме перематывания ниток на швейной машине, в конденсаторе переменной емкости радиоприемника и во многих других приборах и механизмах.

Очень часто встречается логарифмическая спираль (рис. 2). Ее можно видеть на раковинах улиток и линиях расположения семян подсолнечника. Главная особенность логарифмической спирали заключается в том, что она пересекает все лучи, исходящие из центральной точки — полюса, под одним и тем же углом. Если мы, находясь поблизости от Северного полюса начнем все время двигаться на северо-запад, то мы будем кружить вокруг него по логарифмической спирали.

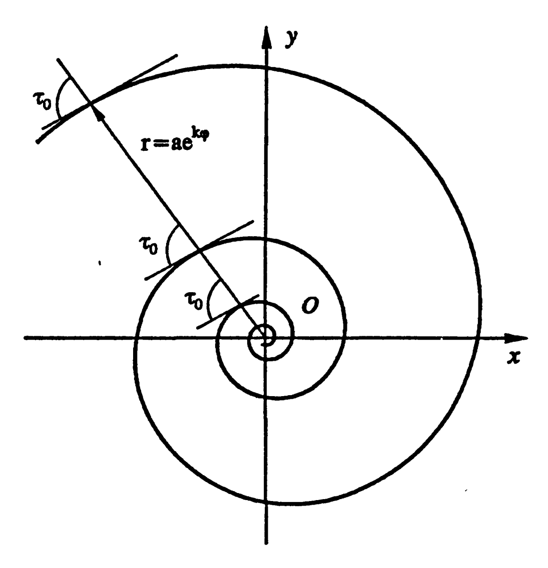
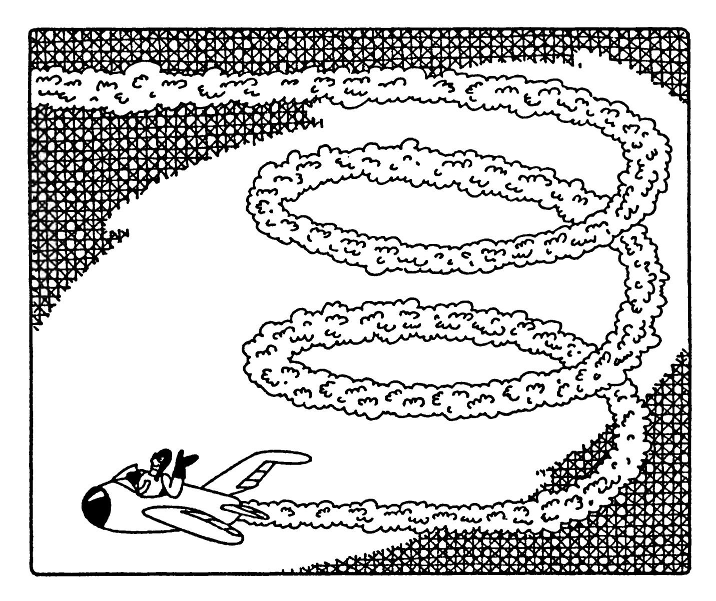


Рис. 2

Биологи заметили, что ночные бабочки пролетают большие расстояния, ориентируясь по параллельным лунным лучам. Они инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полета и лучом света.

Однако, встречая точечный источник света — свечу или лампочку, они начинают лететь по логарифмической спирали, приближаются к источнику света и часто погибают. Здесь инстинкт их подводит.

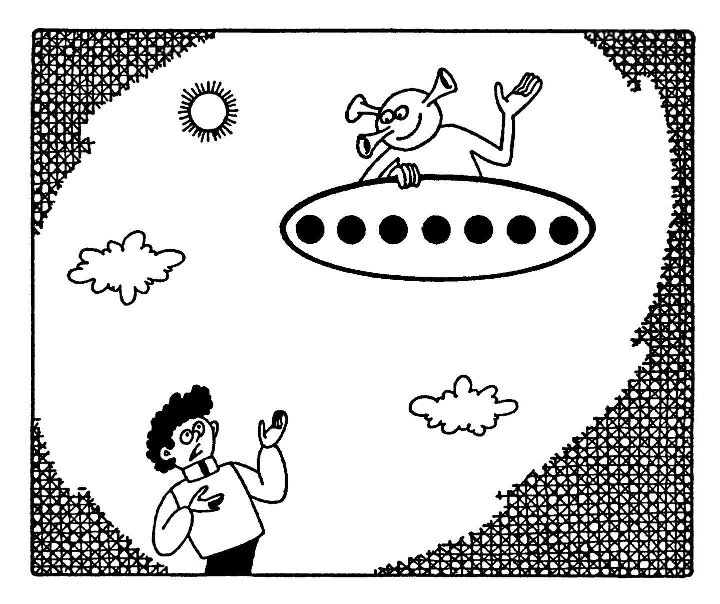
Существуют и другие виды спиралей, например, **спираль Корню**, названная так в честь открывшего ее французского физика XIX века **А.Корню.** У этой спирали кривизна возрастает пропорционально пройденному



пути. А при строительстве железных и шоссейных дорог возникает необходимость гладко соединять прямолинейные участки дороги с участками, расположенными по дугам окружностей. Спираль Корню идеально подходит для роли связующего участка.

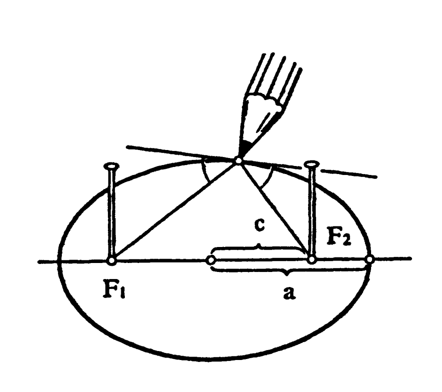
ЭЛЛИПС

Эллипс мы встречаем постоянно, потому что всякая окружность кажется нам эллипсом при взгляде со стороны. Режем колбасу — ломтики имеют форму эллипсов, сдавили резиновый шланг — он приобрел форму эллипса.



Нарисовать эллипс нетрудно. Здесь нам поможет одно его важное свойство. Во всяком эллипсе, оказывается, существуют две замечательные точки — их называют фокусами эллипса. Они замечательны тем, что сумма расстояний от фокусов до точек эллипса одна и та же. Ее принято обозначать через $2a$, а расстояние между фокусами обоз-

начают через $2c$. Зная это, воткнем в чертежную доску две булавки, привяжем к ним концы нитки, натянем кончиком карандаша нитку и будем двигать карандаш по бумаге (рис.1). Кончик карандаша нарисует нам прекрасный эллипс. Выбирая разные расстояния между фокусами и разную длину нитки, мы будем получать различные эллипсы. Стёпень их «вытянутости» характеризуется величиной c/a. Эта величина называется эксцентриситетом. Она равна нулю для окружности, которая является частным случаем эллипса (при $c = 0$) и, очевидно, всегда меньше единицы.



Планеты Солнечной системы движутся по эллипсам. Орбита, наиболее близкая к окружности, у Венеры, ее эксцентриситет равен 0,0068, следующий по величине эксцентриситет у Нептуна (0,0086), затем у Земли (0,0167). Самый большой — у Плутона (0,253), однако он не идет ни в какое сравнение с эксцентриситетом комет, которые движутся по очень вытянутым орбитам. Например, комета Галлея имеет эксцентриситет 0,967.

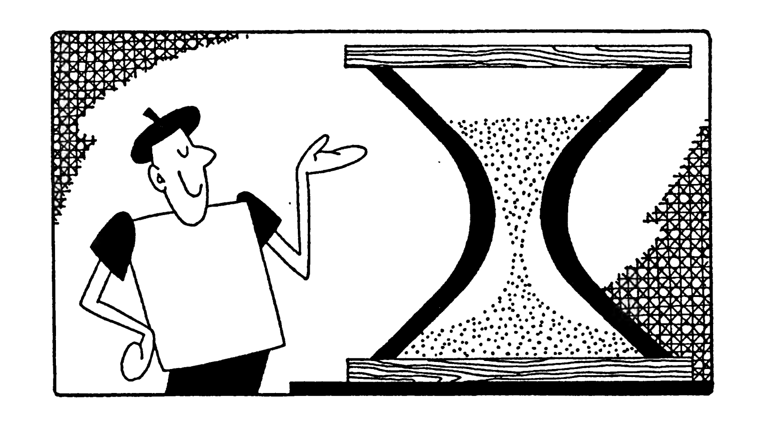
Фокусы эллипса (тт. F и F на рис.1) имеют еще одно замечательное свойство: луч, выходящий из одного фокуса, после отражения от кривой попадает во второй фокус. Это свойство лежит в основе любопытного акустического эффекта, наблюдаемого в некоторых пещерах и зданиях — речь человека, стоящего в некоторой точке, отлично слышна в другой, существенно удаленной от нее точке. В таких случаях стены или потолки помещений имеют форму эллипсов.

Если на двух одинаковых эллипсах нанести зубчики, то получится две шестеренки. Насадим их на оси, отстоящие на расстояние $2a$, так, чтобы эти оси проходили через фокусы эллипсов, тогда эти шестеренки будут все время в зацеплении, но при равномерном вращении одной оси другая будет вращаться то быстрее, то медленнее, что часто бывает необходимо в разных машинах и аппаратах.

ГИПЕРБОЛА

Гиперболу мы встречаем не так часто, как эллипс или параболу. Ее можно определить таким же образом, как и эллипс. Это те точки плоскости, разность которых до двух выбранных точек, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная. Как и в случае эллипса, эта величина обозначается через $2a$, а расстояние между фокусами — через $2c$.

Характерная особенность гиперболы — то, что она состоит из двух одинаковых частей, кроме того, у нее есть асимптоты — прямые, к которым она стремится, уходя в бесконечность.



Используя определение гиперболы, нетрудно изготовить простейший прибор для ее вычерчивания. Нужно взять линейку, нитку и три булавки. Две булавки воткнуть в чертежную доску — в этих точках будут фокусы гиперболы. Затем привязать к этим булавкам концы нитки. Третью булавку втыкаем в линейку недалеко от середины нитки (рис.1), но не в середине. Если теперь, прижимая нитку к краю линейки кончиком карандаша, двигать карандаш, держа нитку в натянутом состоянии, то карандаш будет вычерчивать одну из ветвей гиперболы.

Как и эллипс, гипербола обладает оптическим свойством — луч, вышедший из од-

ного фокуса, после отражения движется так, как будто он вышел из другого фокуса (рис.2).

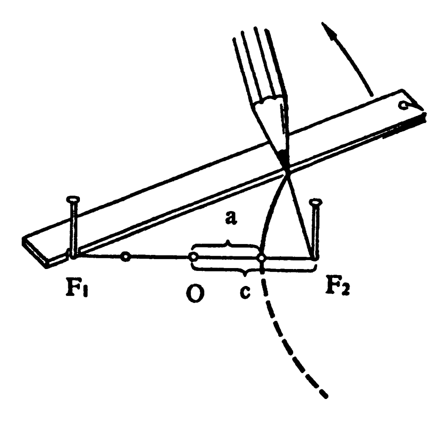


Рис. 1

Если нарисовать график обратной пропорциональной зависимости, $y = k/x$, то по-

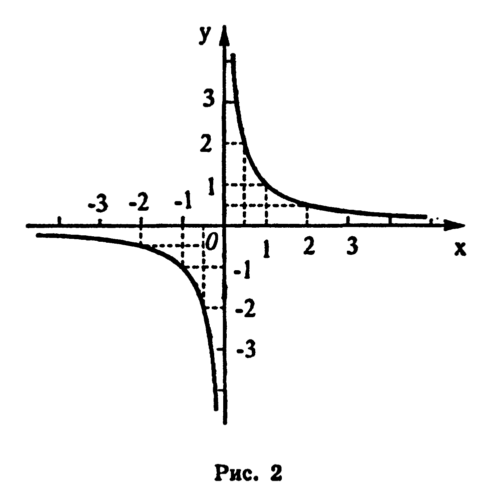
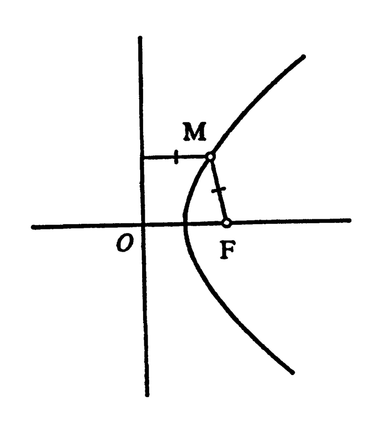


Рис. 2

лученная кривая будет гиперболой, асимптотами которой являются оси координат.

ПАРАБОЛА

Параболой называется кривая, точки которой одинаково удалены от некоторой точки, называемой фокусом, и от некоторой прямой, называемой директрисой параболы. Исходя из этого ее определения, легко соорудить чертежный прибор для вычерчивания параболы. Достаточно взять линейку и угольник, закрепить линейку (ее край будет играть роль директрисы будущей параболы) в некоторой точке, которая станет фокусом параболы, воткнуть булавку, к ней прикрепить нитку, второй конец нитки прикрепить к вершине острого угла угольника так, чтобы длина нитки равнялась длине угольника, примыкающего к этому углу. Дальнейшее видно из рис.1.

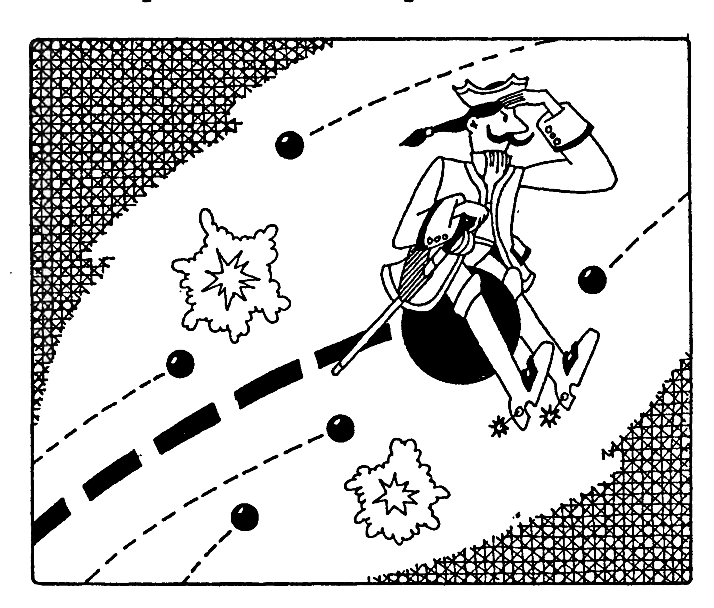


Легко увидеть у параболы ось симметрии. Если вращать параболу вокруг этой оси, то получится поверхность, которая

играет основную роль в фарах автомобиля. Такую же поверхность имеют зеркала в телескопах, прожекторах. Дело в том, что лучи света, выходящие из фокуса параболы, отражаясь от нее, дальше движутся по лучам, параллельным оси параболы, и наоборот, поток параллельных лучей (скажем, от далекой планеты или звезды) собирается в фокусе после отражения от такой поверхности.

Точно такую же форму принимает жидкость в цилиндрическом сосуде, если этот сосуд вращать вокруг его оси. Использовав для этой цели ртуть, американский физик Роберт Вуд получил идеальное зеркало для телескопа.

По параболе летит и брошенный вами ка-



мень и пушечное ядро (правда, если не учитывать сопротивление воздуха), а множество всех точек, до которых может долететь такое ядро при разных углах стрельбы из пушки, также ограничено параболой.

И еще одно очень важное свойство — она является графиком квадратичной зависимости: $y = kx^2$.

БЛЕЗ ПАСКАЛЬ
(1623—1662)

Отец Блеза Паскаля — Этьен Паскаль — служил в парламенте города Клермон-Феррана, как и его предки. Профессию юриста он совмещал с занятиями наукой, поддерживал контакты со многими выдающимися математиками того времени. С великим Ферма он обменивался трудными задачами на построение треугольников; в споре Ферма с Декартом о задачах на максимум и минимум поддерживал Ферма. Когда семья переехала в Париж (это случилось в 1631 году), Этьен Паскаль стал членом знаменитого математического кружка Мерсенна. Так что с юного возраста Блез попал в общество, чрезвычайно полезное для развития его математических способностей.

Рано овдовев, Этьен Паскаль посвятил себя главным образом воспитанию детей (кроме сына, у него было еще две дочери). Си-

стема обучения была тщательно продумана, и поначалу отец считал, что сына не следует раньше времени учить математике: он боялся, что напряженные размышления повредят и без того хрупкому здоровью мальчика. Но интерес к таинственной геометрии, которой занимался отец, оказался так велик, что Блез уговорил отца немного рассказать о ней и... начал играть в геометрию. Никакой терминологии он не знал, так что круги называл «монетками», прямоугольники — «столами», треугольники — «треуголками», отрезки — «палочками», Через нескоторое время отец застал его за этой игрой в тот самый момент, когда Блез обнаружил, что треуголки составляют два угла стола. Потрясенный отец пересмотрел свою теорию обучения сына и позволил ему сколько душе угодно учиться математике.

С 13 лет Блез Паскаль уже вхож в кружок Мерсенна и активно занимался наукой под руководством Жерара Дезарга, инженера и архитектора, автор оригинальной теории перспективы. В 1640 году семнадцатилетний Паскаль опубликовал свой «Опыт о конических сечениях», где сформулировал теорему, высоко оцененную современниками. Позднее в «Полном труде о конических сечениях» он существенно развил эту тему. К сожалению, рукопись была утрачена; последним, кто ее видел, был Готфрид Вильгельм Лейбниц.

В январе 1640 года Этьен Паскаль был назначен интендантом провинции в Руан. По долгу службы ему приходилось производить массу расчетов, в которых ему помогал сын. В конце концов Блезу это надоело, и он сконструировал свой знаменитый арифмометр, и не только сконструировал, а наладил производство счетных машин своего изобретения. До наших дней сохранились восемь экземпляров.

В январе 1646 года Этьен Паскаль во время гололеда вывихнул бедро. Этот несчастный случай привел к перевороту в сознании его сына. Здоровье Блеза, потрясенного несчастьем с отцом, резко пошатнулось: невыносимые головные боли, слабость, он мог передвигаться только на костылях и почти не мог есть. Тяжелая болезнь и подавленное душевное состояние сделало Блеза восприимчивым к строгому и аскетичному учению янсенистов, к числу которых принадлежали врачи-костоправы, лечившие отца. Под влиянием этого религиозного течения Паскаль стал считать занятия наукой греховными, а свои беды — карой за этот грех. К счастью для науки, он не смог противиться соблазну и каждую минуту, когда чувствовал себя лучше, посвящал физическим экспериментам.

В конце 1646 года до Руана докатилась молва об удивительных «итальянских опытах с пустотой». При сооружении фонтанов

во Флоренции обнаружилось, что вопреки предположению Аристотеля, непререкаемого в то время авторитета, вода отказывается подниматься вслед за поршнем выше чем на 34 фута (10,3 м). Это явление заинтересовало многих ученых того времени, и Паскаль не был исключением. Он воспроизвел опыты с ртутью, экспериментировал с водой, маслом, красным вином, интересуясь прежде всего, действительно ли над столбом жидкости в запаянной трубке образуется пустота. Затем при проверке гипотезы о том, что столб жидкости держится за счет атмосферного давления, была обнаружена существенная зависимость высоты столбика ртути от высоты места, где проводятся измерения. Но на показания барометра влияло множество факторов, в том числе и погода. Теперь барометры используют прежде всего для предсказания погоды, и этим мы обязаны Паскалю.

Здоровье постепенно улучшалось, и мрачные мысли оставляли ученого. Даже смерть отца в 1651 году не оказалась для него сильным ударом (каким еще недавно была травма). Он завязывает новые знакомства, и одно из них — с кавалером де Мере, светским человеком и любителем азартных игр, — становится поводом для создания новой науки. Де Мере интересовался задачами о бросании костей (например, сколько раз нужно бросить две игральные кости, чтобы вероят-

ность того, что хотя бы один раз выпадет две шестерки, превысит вероятность того, что две шестерки не выпадут ни разу?). Он привлек внимание Паскаля к этим задачам, тот увлекся, много размышлял, переписывался с Ферма по этому поводу... В этой переписке и родилась теорией вероятностей, ныне бурно развивающаяся наука, возможности которой куда шире, чем расчет шансов на выигрыш в кости...

В 1654 году, чрезвычайно для него плодотворном, Паскаль в послании «Знаменитейшей Парижской математической академии» перечисляет работы, которые готовятся им к публикации, и среди них упомянут трактат, который «может по праву претендовать на ошеломляющее название «Математика случая»...

Но в середине ноября того же года происходит новое несчастье: Паскаль едва не сорвался с моста, проезжая по нему в карете. С тех пор «в обществе или за столом Паскалю всегда была необходима загородка из стульев или сосед слева, чтобы не видеть страшной пропасти, в которую он боялся упасть, хотя знал цену подобным иллюзиям». С этого дня он чувствует непреодолимое презрение к свету, прерывает занятия и уходит в монастырь. Он разочаровался в науке и твердо решил ею не заниматься. Но опять удержаться не смог... по причине зубной боли. Весной 1658 года он заметил, что раз-

мышления над задачей о циклоиде, которую он случайно вспомнил, отвлекают его от боли. Он честно боролся с «грешеыми» мыслями о математике, но не справился с собой и доказал ряд теорем, разработав по существу все, что было необходимо для построения дифференциального и интегрального исчисления в общем виде. Позднее Лейбниц удивлялся, насколько был Паскаль, близок к созданию этой теории, и недоумевал, почему тот остановился на самом пороге новой математики...

После середины 1659 года Паскаль больше не возвращался ни к физике, ни к математике. Он настолько был болен, что посетивший его в 1660 году Гюйгенс нашел его глубоким стариком (а было Паскалю всего 37 лет)...

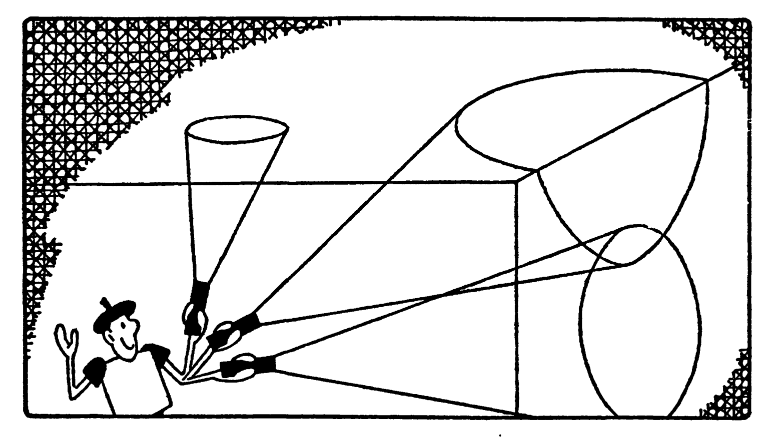
В последние годы он занимался исключительно философией, но главную свою книгу, известную под названием «Мысли» (название книге дали издатели после смерти автора), так и не завершил.

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

Вы никогда не приглядывались к световому пятну от настольной лампы на поверхности стола или от автомобильной фары на асфальте шоссе? Если нет, то возьмите вечером карманный фонарик и поэкспериментируйте с ним. Световое пятно от вертикаль-

но расположенного фонарика будет кругом. Немного повернем его, и пятно уже будет иметь форму овала. Такой овал называется **эллипсом.**

Будем понемногу далее поворачивать фонарик. Эллипс будет все больше и больше вытягиваться, а в некоторый момент его наиболее удаленная точка уйдет в бесконечность. Кривая, ограничивающая такое пятно, называется параболой. Неограниченные кривые, которые получаются при дальнейшем вращении фонарика, называются гиперболами. Все эти кривые называются коническими сечениями. Такое название они получили заслуженно, поскольку световой столб, выходящий из фонарика, является конусом.



Кстати, почему конус называется конусом? По-гречески «конус» означает сосновую шишку, а она очень напоминает конус. В

школе изучается конус как тело, образованное кругом (основание конуса), точкой, лежащей вне плоскости основания (вершиной конуса), и всеми отрезками, соединяющими точки основания с вершиной конуса. Предполагается, что отрезок, соединяющий вершину с центром основания, перпендикулярен плоскости основания. Такой конус называется прямым конусом. Мы же рассмотрим коническую поверхность. Она составлена из всех прямых (а не отрезков), проходящих через вершину и точки окружности. Пересекая эту поверхность плоскостями, мы будем получать различные конические сечения. Обратим внимание на то, что в случае гиперболы мы получаем еще одну кривую на второй половинке конической поверхности. Гипербола состоит из двух одинаковых частей, а с помощью фонарика мы получили одну ее половинку.

Коническими сечениями много занимались математики Древней Греции. Они обнаружили, что для каждой из этих кривых существует точка (ее назвали фокусом) и прямая (ее назвали директрисой) такие, что отношение расстояния точки кривой до фокуса к расстоянию их до директрисы является постоянной величиной. Эту величину назвали эксцентриситетом. Для эллипсов она меньше единицы, для параболы равна единице, для гипербол — меньше единицы.

Долгое время конические сечения не находили существенных применений в прак-

тике, пока Иоганн Кеплер не обнаружил, что планеты вращаются вокруг Солнца по эллипсам. А затем было доказано, что всякое тело, движущееся в поле тяжести планеты, совершает свое движение по эллипсу, параболе или гиперболе. Так конические сечения вошли в арсенал астрономов и космонавтов.

ЗАДАЧА ДИДОНЫ

Финикийская царевна Дидона, спасаясь от своего брата, тирана Пигмалиона, отплыла из родного города Тира с небольшим отрядом своих сторонников. Было это, если верить легенде, около 825 года до н.э. Долго плыли царевна и ее спутники по средиземному морю, пока не пристали к берегу Африки. Жили в тех местах нумидийцы. Пришельцы им были совершенно ни к чему. Но Дидоне некуда было деться, место ей понравилось, и царевна стала упрашивать нумидийского царя Ярба продать ей немного земли. Желая, видимо, отделаться от настойчивой финикиянки, Ярб заломил баснословную цену за клочок земли, который можно окружить одной бычьей шкурой. К его удивлению и разочарованию, Дидона приняла это издевательское предложение, расплатилась и отправилась отмерять свою землю. Только она не стала расстилать шкуру на берегу. Сначала она разрезала ее так, что получился

тонкий кожаный ремешок (а он вышел очень длинным!), и этим ремешком окружила солидный участок, на котором и основала впоследствии великий город Карфаген. Ярб был в ярости: так, как его, мало кого одурачивали за всю историю человечества. Но он был честным человеком и сдержал слово: земля осталась за Дидоной.

Так это было или не так — теперь судить трудно. Но, между прочим, карфагенская цитадель называлась Бирса, что и значит «бычья шкура».

Итак, задача, которую пришлось решить Дидоне, такова: какую наибольшую площадь можно окружить веревкой заданной длины? Или, иначе: какая геометрическая фигура среди фигур с одинаковым периметром имеет наибольшую площадь? Оказывается, круг.

Задача Дидоны — одна из обширного круга изопериметрических задач — о соотношении площадей фигур равных периметров. Так, из всех треугольников с одинаковой суммой длин сторон наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник; из всех прямоугольников — квадрат. А из всех тел с одной и той же площадью поверхности наибольший объем имеет шар. Недаром круг и шар считались в древности наиболее совершенными среди всех геометрических объектов.

Ответ на задачу Дидоны знали еще древние греки. А вот доказательство того, что

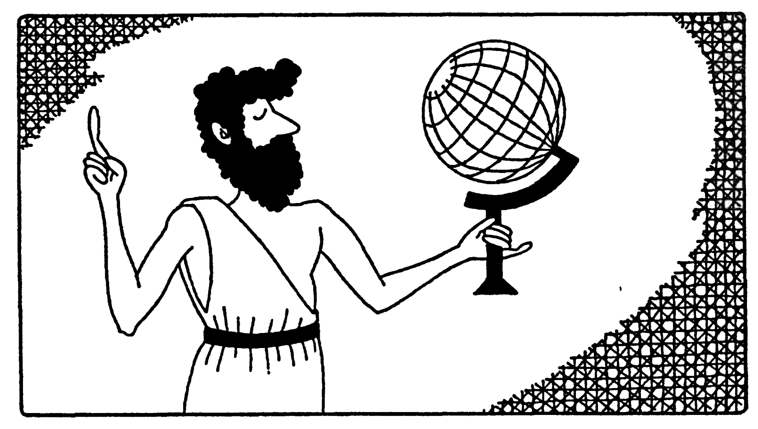
наибольшую площадь среди фигур равного периметра имеет круг, было найдено лишь в XVIII веке великим Леонардом Эйлером. Для этого ему пришлось создать новый раздел математики — вариационное исчисление...

Между прочим... задачу Дидоны можно «решить» при помощи мыльной пленки. Возьмите проволочное колечко, окуните его в мыльный раствор и осторожно положите на образовавшуюся пленку связанную кольцом нитку (не забудьте сначала смочить ее в том же растворе, иначе пленка лопнет). Нитка лежит петлей неправильной формы. А теперь проколите пленку внутри нитяной петли. Мыльная пленка, стремясь занять как можно меньшую площадь, мгновенно расправит петлю в правильную окружность!

КООРДИНАТЫ

Люди древнего мира путешествовали довольно далеко, и, конечно, им не приходилось рисовать карты и отмечать на них расположение гор и рек, городов и стран, удобные дороги и опасные места... Но пользуясь готовой картой, трудно найти на ней город, если знаешь только его название. (Попробуйте отыскать на глобусе город Ресифи! Даже если я подскажу, что это в южной Америке, вам придется повозиться!) Поэтому все

путешественники должны быть вечно благодарны древнегреческому ученому Гиппарху, около 100 года до н.э. предложившему нарисовать на географической карте параллели и меридианы и обозначить числами широту и долготу.



Долгое время лишь география — «землеописание» — пользовалась этим замечательным изобретением, и только в XIV веке французский математик Никола Оресм попытался приложить его к «землеизмерению» — геометрии (это лишний раз показывает, как давно и как далеко геометрия оторвалась от земли...). Он нарисовал на плоскости сетку из прямых линий, пересекающихся под прямыми углами, и стал задавать местоположение точек широтой и долготой.

Идея оказалась чрезвычайно плодотворной. Первым, кто по достоинству оценил новшество и обнаружил, какие обширные горизонты оно открывает перед наукой, был

великий француз Рене Декарт (1596—1650). Его имя носит теперь прямоугольная система координат, обозначающая место любой точки плоскости расстояниями от этой точки до «нулевой широты» — оси абсцисс и «нулевого меридиана» — оси ординат (рис.1). По

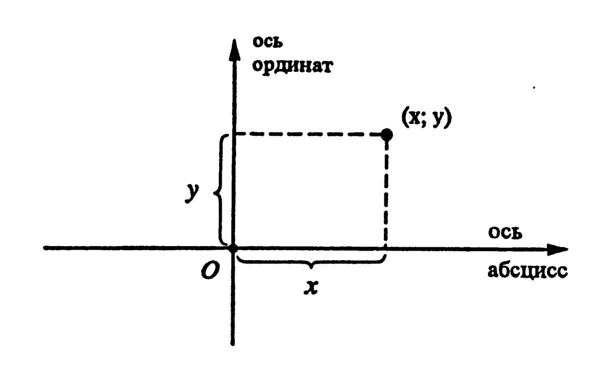


Рис. 1

традиции, введенной Декартом, «широта» точки обозначается буквой *x*, «долгота» — буквой *y*.Чем же так замечательна декартова система координат?

До ее появления не существовало единого подхода к решению геометрических задач. В огромном количестве их (особенно таких, как задачи на построение и доказательство) каждый раз приходилось заново придумывать способ решения. Обозначив точки плоскости парами чисел *x* и *y*, оказалось возможным изучать связь между координатами различных точек, записывая уравнения и решая их. А уравнения многих очень сложных

объектов оказались неожиданно простыми. Вот пример. Великий древнегреческий геометр Аполлоний проделал титанический труд, изучая форму кривых, получающихся при разрезании конуса плоскостью. Эти кривые — эллипс, гипербола и парабола — были долгое время одними из самых сложных объектов, известных геометрам. Но в декартовых координатах они задаются уравнениями, содержащими лишь первые и вторые степени координат (например, точки эллипса задает уравнение $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, где a и b — конкретные числа). Выходит, это лишь следующий уровень сложности после прямых линий, в уравнении которых координаты входят только в первой степени...

А теперь посмотрим чуть внимательнее на окружность с центром в начале координат (рис.2). Она задается уравнением $x^2 + y^2 = R^2$ (ведь каждая ее точка — вершина прямоугольного треугольника с катетами x и y и гипотенузой R, и, разумеется, сумма квадратов катетов в каждом треугольнике равна квадрату гипотенузы). Красивая формула! Но окружность можно задать еще проще. Нужно только по-

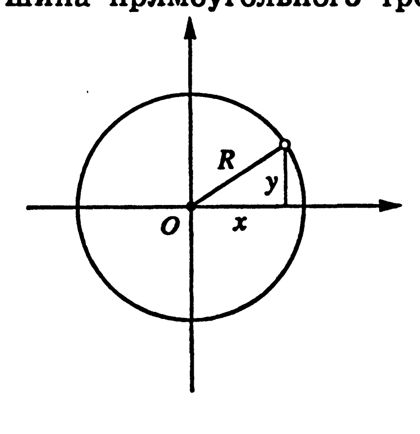


Рис. 2

другому ввести координаты, и сейчас мы это сделаем.

Вместо двух осей нарисуем одну — луч, выходящий из начала координат, точки O. Каждая точка плоскости лежит на каком-то (другом или этом, выбранном) луче. Ее расстояние до начала координат будет первой координатой; обозначим ее буквой r. Второй же будет угол, на который надо повернуть (против часовой стрелки) нашу ось, чтобы совместить ее с лучом, на котором находится нужная точка; угол этот обозначим буквой (рис.3). Такая система координат называется

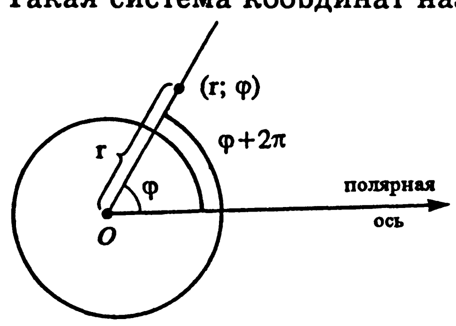


Рис. 3

полярной; начало луча — точку O — называют полюсом, сам луч — полярной осью. Коренное отличие от декартовой системы бросается в глаза: одна и та же точка может иметь много угловых координат, отличающихся на 2π (360°):

$$\varphi = \varphi + 2\pi = \varphi + 4\pi = \varphi + 2\pi k,$$

где k — любое целое число. Это неудобно; поэтому часто считают, что $0 \le \varphi < 2\pi$.

Зато в этих координатах уравнение нашей окружности — проще некуда: $r = R$. Теперь мы можем нарисовать полярную координатную сеть, состоящую из линий постоянного радиуса (это окружности) и постоянного угла (это лучи). Она показана на рис. 4. Многие кривые, на первый взгляд сложно устроенные, после перехода к полярным координатам оказываются очень простыми. Например спираль, изображенная на рис. 5, задается в полярных координатах уравнением $r = 1 + \frac{\varphi}{2\pi}$ в прямоугольных координатах подобное уравнение задавало бы наклонную прямую, не проходящую через начало координат). А как к ней подступиться, находясь в декартовой системе, что-то непонятно...

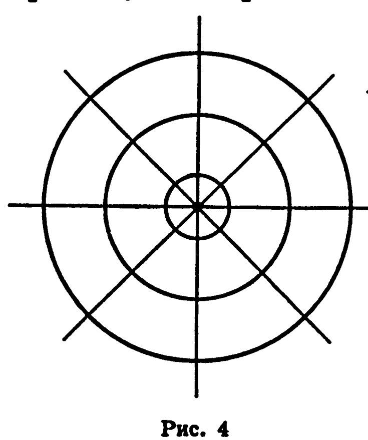


Рис. 4

В пространстве тоже можно построить декартову систему координат, добавив к прямоугольным координатам плоскости перпендикулярную — ось аппликат (рис.6). Вслед за Декартом соответст-

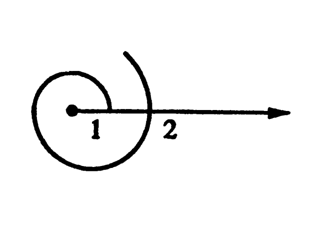


Рис. 5

вующую координату точки обозначают буквой *z*. В трехмерном пространстве, исчисленном этими координатами, легко поддаются изучению геометрические тела довольно причудливых форм, сложность которых столь же обманчива, сколь сложность эллипса.

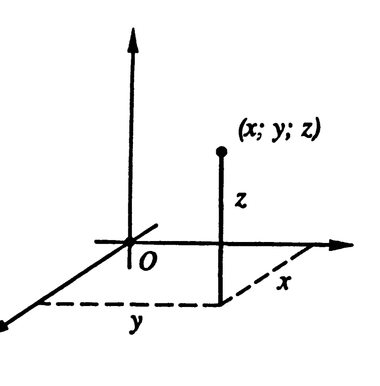


Рис. 6

Иногда оказывается очень полезной пространственная сестра полярной системы координат — цилиндрическая. Она получается из полярной системы плоскости добавлением вертикальной оси. А цилиндрической ее называют потому, что точки с постоянной величиной *r* образуют цилиндр (рис.7).

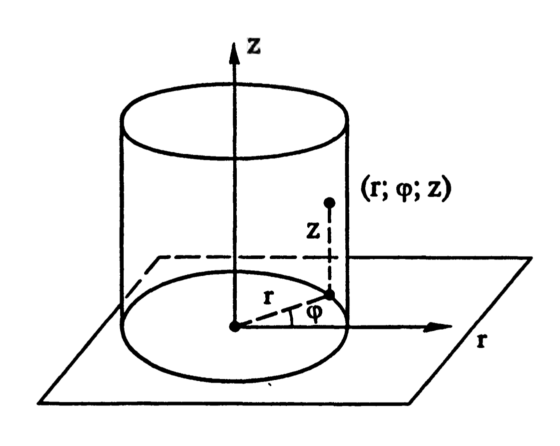


Рис. 7

Другая сестра полярной системы координат на самом деле вам уже хорошо знакома. Это сферическая система, в которой положение точки определяют одно расстояние и два угла (рис.8). Ее называют сферической, ибо поверхности равных радиусов здесь — сферы... Вы еще не догадались, как называют углы и где вы встречались с этими координатами? Разумеется, один угол называют широтой, а другой долготой. каждый раз при взгляде на глобус вспоминайте, что параллели и меридианы — это угловые координаты на поверхности постоянного радиуса, на которой мы живем.

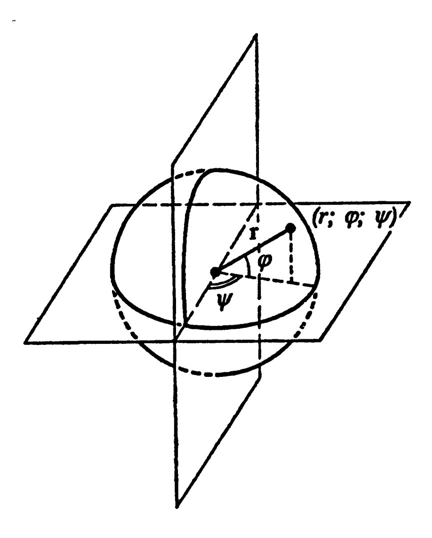


Рис. 8

Между прочим... Древние греки развивали свою алгебру при помощи геометрических построений. Тогда не было алгебры без геометрии. Прошли века, алгебра отделилась от геометрии и зажила самостоятельн ой жизнью. И вот с введением в геометрию координат две ветви математики снова тесно переплелись: не стало геометрии без алгебры!..

ДЕКАРТ
(1596—1650)

Рене Декарт родился в 1596 году на юге Франции в небогатой дворянской семье. Когда Рене исполнилось восемь лет, отец отправил его учиться в католический колледж в городе Ла Флеш.

Обучение в школах того времени было оторвано от реальной жазни. Оно опиралось на церковные догмы и авторитет античных мудрецов, прежде всего Платона и Аристотеля. Неудивительно, что активно мыслящим ученикам, к числу которых относился Декарт, такое знание представлялось недостоверным и неполным.

Окончив колледж, Декарт сменил немало занятий. Светская жизнь, служба в армии, путешествия помогли ему восполнить тот отрыв от реальности, который был создан в школьные годы.

В 1628 году Декарт поселился в Голландии — стране, недавно пережившей национально-освободительную буржуазную революцию и ставшей одним из самых передовых государств того време-



Декарт Р.

ни. В Голландии издавались сочинения авторов, во многом расходившиеся с церковным учением, в том числе книги Коперника и Галилея.

Декарт прожил в Голландии двадцать лет. Именно там в 1637 году вышла в свет его знаменитая книга «Рассуждения о методе». В ней Декарт сформулировал четыре принципа, которым должен следовать ученый: 1) включать в свои суждения только то, что представляется уму так ясно и отчетливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению; 2) делить каждую из рассматриваемых трудностей на столько частей, сколько потребуется, чтобы лучше их разрешить; 3) руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных; 4) делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

Истин, не подлежащих сомнению, по Декарту, совсем немного. Самая знаменитая из них: «Я мыслю — следовательно, я существую».

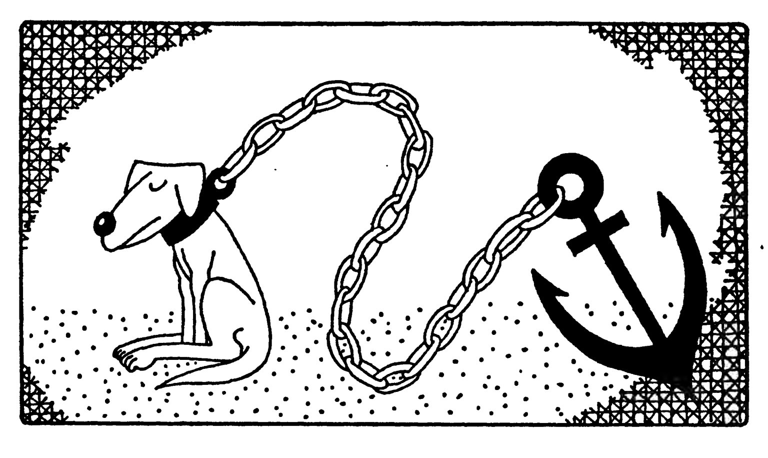
«Рассуждение о методе» содержало три приложения, названные «Диоптрика», «Метеоры» и «Геометрия». В этих приложениях Декарт применил свой научный метод к оптическим и метеорологическим явлениям, и, наконец, к математике.

В истории математики Декарт обессмертил свое имя тем, что связал кривые на плоскости с уравнениями, которыми они описываются в координатной системе. Он выяснил, что уравнения с переменными в первой степени задают на плоскости прямые линии. Символика, предложенная Декартом, сохранилась до сих пор. Вслед за ним мы обозначаем переменные последними буквами латинского алфавита: (x, y, z), — а для заданных величин используем начальные латинские буквы: a, b, c... Нынешнее обозначение степени: a^2, b^2 — также предложено Декартом.

В 1649 году по приглашению шведской королевы Декарт переехал в Стокгольм. Но северный климат оказался для него слишком холоден. Год спустя ученый умер от воспаления легких.

ПЕРЕПЛЕТЕНИЯ КОЛЕЦ

Кто не держал в руках цепочек? Не всегда их кольца круглые, а в цепочках, которые носят на шее, сразу и не разберешь, что они сделаны из колечек. Цепочкой является и олимпийская эмблема, символизирующая единение всех пяти обитаемых континентов планеты (рис.1). Некоторые художники изображают эти пять колец более тесно сплетенными (рис.2), здесь сцепление напомина-



ет часть кольчуги древнего воина, но кольца неравноправны: одни сцеплены с двумя другими, вторые — с тремя, а среднее кольцо со всеми четырьмя.

А нельзя ли сцепить кольца более «равноправно»? Проще всего сцепить первое и последнее звенья у обычной цепочки, тогда каждое звено цепочки будет сцеплено с двумя звеньями (рис.3). Можно сцепить пять звеньев так, чтобы каждое звено было сцеплено с четырьмя остальными. (рис.4). А вот сцепить пять звеньев так, чтобы каждое звено было сцеплено ровно с тремя остальными, не удаст-

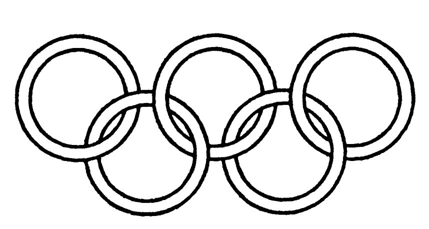


Рис. 1

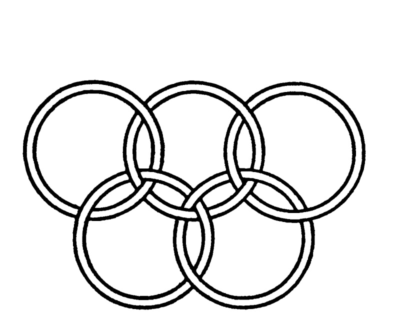


Рис. 2

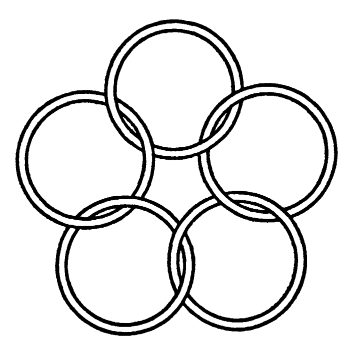


Рис. 3

ся, сколько бы мы не старались. Почему? А вот почему. Предположим, что такое сцепление удалось совершить, тогда свяжем каждые два сцепленных кольца веревочкой, но прежде посчитаем, сколько веревочек нам понадобится. На каждое кольцо будет надето три веревочки, а колец пять, выходит нужно 15 веревочек? Нет! Ведь каждую веревочку мы посчитали два раза: один раз с одним

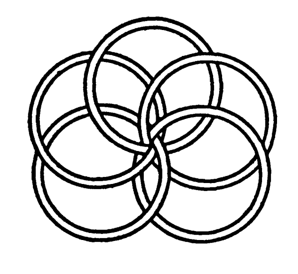


Рис. 4

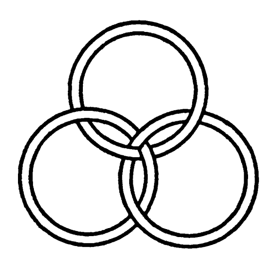


Рис. 5

кольцом, а во второй раз с тем кольцом, в котором первое соединено. Итак, веревочек должно быть 7,5! Ну, а такого не может быть. Значит, ваше предположение о возможности сцепления неверно, т.е. такое сцепление невозможно.

А можно ли так сцепить кольца, чтобы никакие два кольца не были сцеплены? Оказывается, можно! Три кольца, сцепленных таким образом, изображены на рис. 5. Их называют **кольцами Борромео**. Проверьте, что они действительно сцеплены и что при разрезании любого из этих колец конструкция рассыпается (рис. 5).

Можно ли таким образом соединить 4, 5 или 6 колец? Пожалуйста! Принцип соединения хорошо виден на рис. 6.

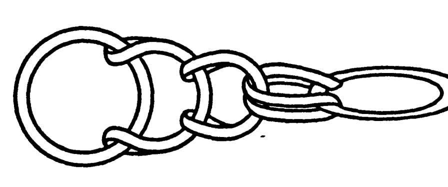


Рис. 6

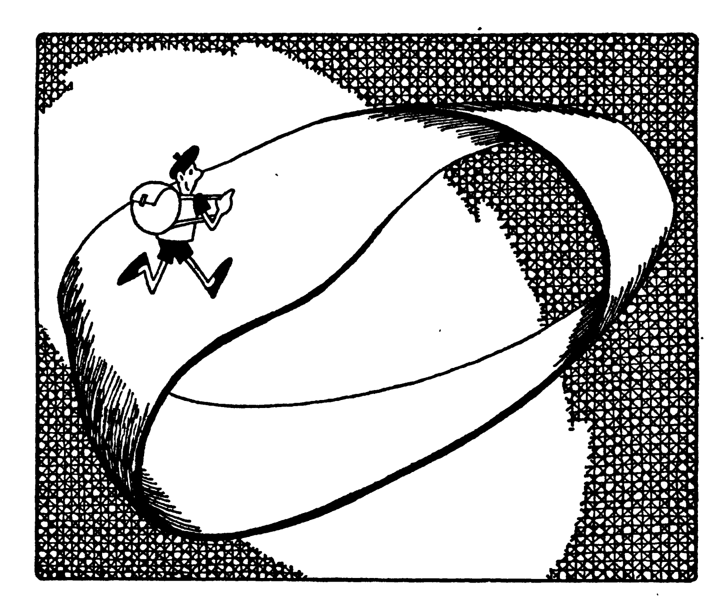
ЛИСТ МЕБИУСА

Лист Мебиуса относится к числу «математических неожиданностей». Получить его очень просто: склейте из бумажной полоски кольцо, только перед склеиванием поверните один конец на 180°. Если полоска бумаги была длинной, то такой поворот мог произойти случайно. Рассказывают, что открыть свой «лист» Мебиусу помогла служанка, сшившая неправильно концы ленты.

Как бы то ни было, но в 1858 году лейпцигский профессор Август Фердинанд Мебиус, ученик знаменитого К.Ф.Гаусса, астроном и геометр, послал в Парижскую академию наук работу, включающую сведения об этом листе. Семь лет он дожидался рассмотрения своей работы, и, не дождавшись, опубликовал ее результаты. Одновременно с Мебиусом изобрел этот лист и другой ученик К.Ф.Гаусса — Иоганн Бенедикт Листинг, профессор Геттингенского университета. Свою работу он опубликовал на три года раньше, чем Мебиус, — в 1862 году.

Что же поразило этих двух немецких профессоров? А то, что у листа Мебиуса — всего одна сторона. Мы же привыкли к тому, что у всякой поверхности, с которой мы имеем дело (лист бумаги, велосипедная или волейбольная камера) — две стороны. Убедиться в односторонности листа Мебиуса несложно: начните постепенно окрашивать его в ка-

кой-нибудь цвет, начиная с любого места, и по завершении работы вы обнаружите, что весь он полностью окрашен. А можете проследить путешествие человека по листу Мебиуса на рисунке.



Вторая неожиданность поджидает нас в тот момент, когда мы попробуем разрезать лист Мебиуса по его средней линии. Нормальное кольцо при этом распалось бы на два куска, а лист Мебиуса превратится в одно перекрученное кольцо (рис.1). Еще удивительнее, что полученное кольцо будет уже двухсторонним.

Неожиданность номер три: граница у листа Мебиуса одна, а не состоит из двух частей, как у обычного кольца.

Свойство односторонности листа Мебиуса было использовано в технике: если у ременной передачи ремень сделать в виде листа Мебиуса, то его поверхность будет изнашиваться вдвое медленнее, чем у обычного кольца. Это дает ощутимую экономию (рис.2).

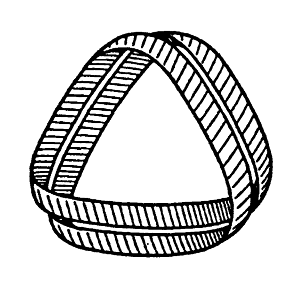


Рис. 1

Заметим, что свойство односторонности не исчезает у поверхности, если ее гнуть, растягивать, сжимать, но не склеивать и не рвать. Свойство геометрических фигур, которые не меняются при таких преобразованиях, изучает математическая наука топология. Любопытно, что это название ей дал Иоганн Листинг. Начало этой современной науки положили исследования листа Мебиуса.

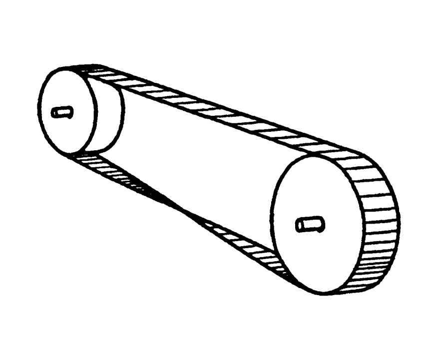


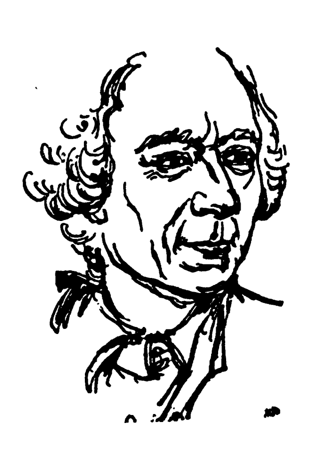
Рис. 2

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР
(1707—1783)

Научные результаты принадлежат всему человечеству. По крайней мере, это относится к естественным наукам, где результаты истинны или ошибочны вне зависимости от национальности и социального положения автора. И все-таки существует наука китайская, французская, российская...

Российская возникла благодаря петровскому «окну в Европу». Правда, сам Петр не дожил до создания «де сиянс Академии», но через несколько месяцев после его смерти в 1725 году санкт-петербургская Академия Наук была открыта. В числе первых академиков было немало честолюбивых молодых западноевропейцев.

Леонард Эйлер, швейцарец по происхождению, приехал в Санкт-Петербург в 1727 году. Его товарищ, Даниил Бернулли, выхлопотал для него место адъюнкта по физиологии. В дальнейшем Эйлеру приходилось заниматься и картографией, и техникой, и даже составлением «научно обос-



Эйлер Л.

нованного» гороскопа для царевича Иоанна VI. Но славу величайшего ученого ему принесла математика.

Эйлер продолжил работу, начатую Пьером Ферма. Он доказал несколько гипотез, оставленных французским математиком, в том числе «великую теорему Ферма» для уравнений третьей и четвертой степени. Он уделил много внимания изучению бесконечных сумм и произведений, исследуя их не только для вещественных, но и для комплексных чисел. Именно Эйлер ввел для мнимой единицы обозначение i.

Не было такой области математики XVIII века, в которой Эйлер не достиг бы заметных результатов. Практически во всех разделах математики вы встретите либо теорему Эйлера, либо формулу Эйлера, либо метод Эйлера. В этом можно убедиться даже из статей этой книги. Решая математические головоломки и развлекательные задачи (например, обходя конем шахматную доску), Эйлер заложил основы теории графов, ныне широко используемой во многих приложениях математики. Обобщая изопериметрическую задачу (вспомним задачу Дидоны), он создал метод решения подобных задач, получивший название «вариационное исчисление». Сердцевиной этой науки является «формула Эйлера». Эти примеры можно продолжать еще очень долго.

Напряженная работа повлияла на зрение

ученого. В 1735 году он ослеп на один глаз, в 1766 на оба. Операция привела к незначительному улучшению: ученый мог лишь разбирать записи, сделанные мелом на черной доске. Но и после этого Эйлер продолжал работу, диктуя ученикам свои статьи. Голова ученого оставалась ясной до последних дней жизни.

Эйлер умер в 76 лет и был похоронен на Смоленском кладбище Санкт-Петербурга. В 1957 году его прах был перенесен в Александро-Невскую лавру.

ОДНИМ РОСЧЕРКОМ

Попробуйте нарисовать «конверт», изображенный на рис.1, одним росчерком пера, т.е. не отрывая ручки от бумаги и не проводя дважды один и тот же отрезок. Ваши попытки будут обречены на неудачу. А вот «распечатанный конверт», изображенный на рис.2, совсем нетрудно нарисовать, выполнив указанные условия. В чем здесь дело?

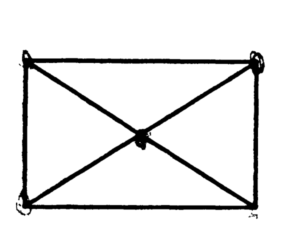


Рис. 1

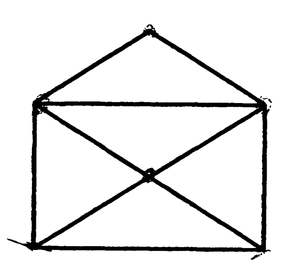


Рис. 2

Впервые над задачей такого типа задумался Леонард Эйлер после посещения города Кенингсберга (ныне Калининград). В городе было семь мостов через реку Прегель. Их расположение указано на рис.3. Гостям города предлагали задачу: пройти по всем мостам, причем по каждому мосту ровно один раз. Никому из гостей не удавалось совершить подобное путешествие.

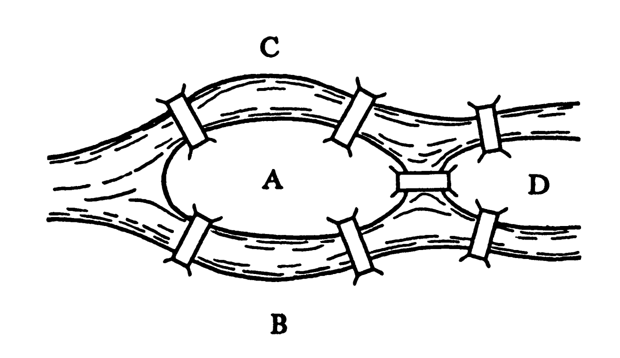


Рис. 3

Эйлер отметил на карте города по одной точке на каждом берегу реки и на каждом острове. Затем он соединил эти точки в соответствии с расположением мостов. Получилась следующая картинка (рис.4). Теперь задача обхода мостов свелась к задаче изображения полученной картинки одним росчерком.

Картинки, подобные этой, то есть состоящие из нескольких точек (их стали называть вершинами) и нескольких дуг, соеди-

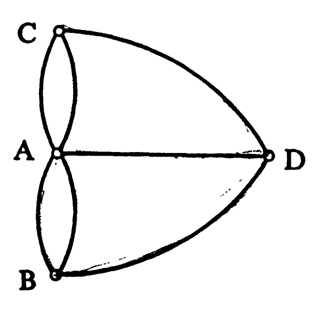


Рис. 4

няющих некоторые из этих точек (их стали называть ребрами) получили название графов. С дворянским титулом их объединяет общее происхождение от латинского слова «графио» — пишу. Заметим, кстати, что генеалогические деревья дворянских родов — это также графы в их математическом понимании. Если вы взглянете на географическую карту, то увидите граф, вершины которого — города, а ребра — соединяющие их линии железных дорог. Выяснилось, что графы очень удобно использовать во многих областях человеческой жизни для описания взаимосвязей между объектами, процессами или событиями. Но вернемся к кенигсбергской задаче.

Давайте ее четко сформулируем. При каком условии можно обойти все ребра графа, пройдя каждое ровно один раз? Решение оказалось очень простым. Сосчитаем, сколько ребер выходит из каждой вершины. Одни из этих чисел будут четными, а другие — нечетными. Будем и сами вершины называть четными, если из них выходит четное число ребер, и нечетными в противном случае. Эйлер доказал, что если среди вершин графа больше двух нечетных вершин, то этот граф

можно обойти, а если их меньше двух, то нельзя.

При наличии двух нечетных вершин обход следует начинать в одной из них, а заканчивать в другой. У графа не может быть ровно одной нечетной вершины (это нетрудно показать), а если у него нет нечетных вершин, то обход можно начинать с любой вершины и в ней же заканчивать.

В графе на рис.1 пять вершин: одна четная и пять нечетных, следовательно, этот граф нельзя обойти. В графе на рис.2 шесть вершин: четыре четных и две нечетных. Для обхода этого графа следует начинать обход в одной из нижних вершин, а заканчивать в другой. В графе на рис.4 четыре вершины, все они нечетны, поэтому граф обойти нельзя.

ТРИ КОЛОДЦА И ПЛОСКИЕ ГРАФЫ

Посмотрите на рис.1: три графа, изображенные на нем, по сути одинаковы. Все они имеют по четыре вершины и каждая вершина связана с ребром каждой. Для графа, как уже говорилось, несущественно, какой именно линией связаны вершины графа в качестве ребра, поэтому все три графа на этом рисунке являются изображениями одного и того же графа, хотя на первом рисунке его ребра пересекаются, а на остальных — нет.

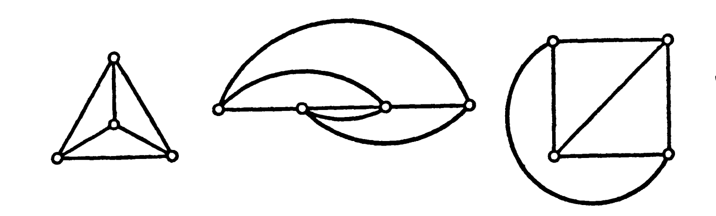


Рис. 1

А всегда ли можно так изобразить любой граф на плоскости, чтобы его ребра не пересекались? Впервые этот вопрос возник при решении старой головоломки. Вот как ее описывает Льюис Кэрролл. В трех домиках жили три человека, неподалеку находилось три колодца: один с водой, другой с маслом, а третий с повидлом. Однако хозяева домиков перессорились и решили провести тропинки от своих домиков к колодцам так, чтобы эти тропинки не пересекались. Первоначальный вариант, изображенный на рис. 2, по этой причине их не устраивал.

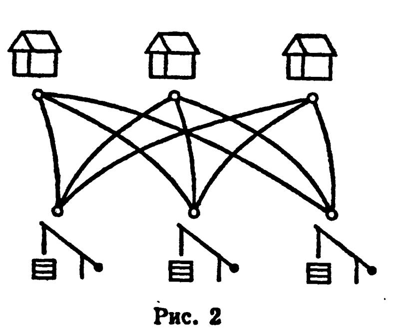


Рис. 2

На рис. 3 изображена очередная попытка проложить тропинки, на которых осталась непроведенной только одна тропинка.

Графы, кото-

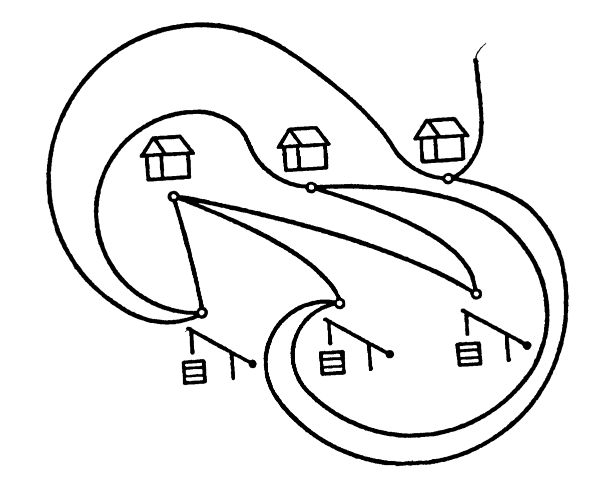


Рис. 3

рые можно изобразить на плоскости без пересечения их ребер, принято называть плоскими. Если немного подумать, то можно доказать, что граф «домики-колодцы» с шестью вершинами не является плоским. Не плоский и граф с пятью вершинами, каждые из которых соединены ребром (рис.4).

Эти два графа, как оказалось, играют очень важную роль в определении того — является ли данный граф плоским. Оказывается, что если граф не плоский, то в нем «сидит» или граф «домики-колодцы» или

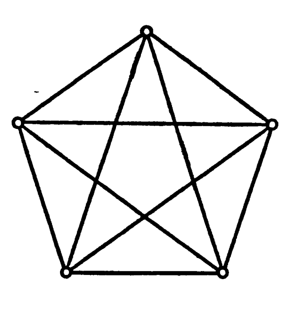


Рис. 4

«полный пятивершинник» (рис.4). Эту теорему независимо друг от друга доказали польский математик **К.Куратовский** и наш академик **Л.С.Понтрягин.**

Плоские графы разбивают плоскость на куски, как границы государств разбивают поверхность Земли. Любопытно, что между количеством вершин — *В*, количеством ребер — *Р* и количеством стран — *Г* плоского графа существует простое соотношение:

$$В - Р + Г = 1$$

Если же к странам отнести и внешность графа — бесконечную страну, то формула будет иметь вид:

$$В - Р + Г = 2$$

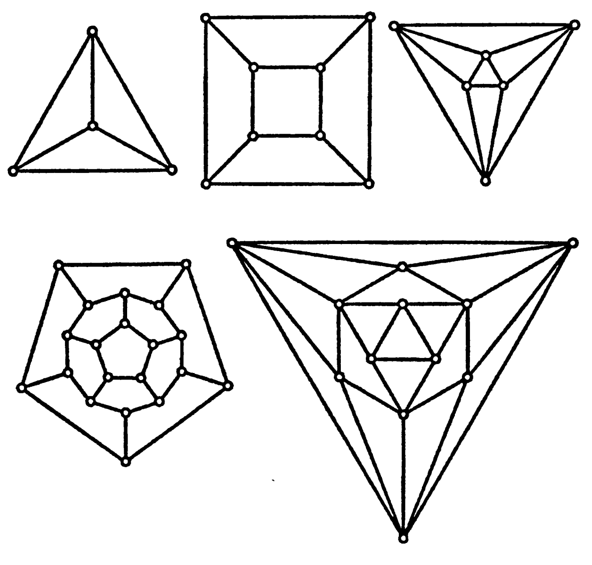


Рис. 5

Эта формула будет верна для любого выпуклого многогранника, где *В*, *Р*, и *Г* — количество его вершин, ребер и граней. Например, у куба *В* = 8, *Р* = 12, *Г* = 6 и мы имеем:

8 — 12 + 6 = 2.

Вершины и ребра многогранников, очевидно, образуют графы, причем для выпуклых многогранников (и не только для них) эти графы будут плоскими. На рис.5 изображены графы, соответствующие правильным многогранникам. На них вы можете проверить справедливость формулы. Она была открыта Леонардом Эйлером, но выяснилось, что для многогранников она была известна еще Рене Декарту.

ПРОБЛЕМА ЧЕТЫРЕХ КРАСОК

В далеком 1852 году студент лондонского университета Гутри раскрашивал карту Англии, желая, чтобы на ней граничащие графства были окрашены в различные цвета. Он обнаружил, то для такой раскраски вполне достаточно четырех красок и пред-

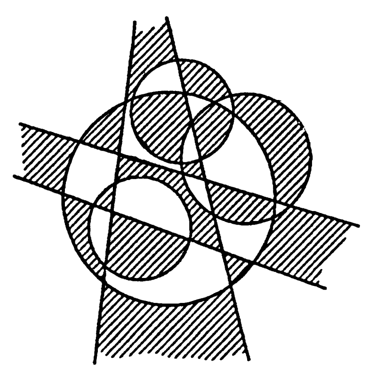
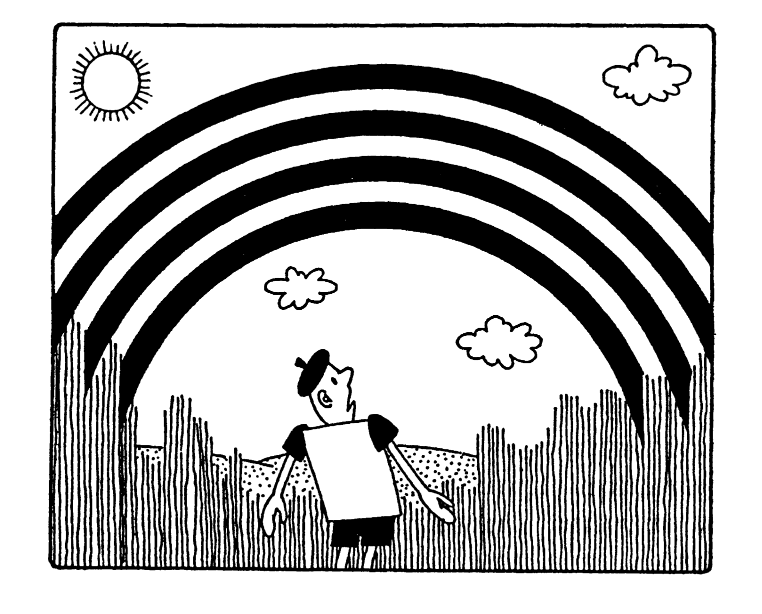


Рис. 1



положил, что четырех красок достаточно для правильной раскраски любой карты. Раскраска правильная, если граничащие страны окрашены в различные цвета. Шахматная доска правильно окрашена двумя красками. Если вы проведете на плоскости несколько прямых и окружностей, то полученную карту также всегда можно правильно окрасить двумя красками (рис.1).

Но всегда ли хватит четырех красок? Этот вопрос заинтересовал математиков. В 1968 году американские математики Оре и Стемпл доказали, что это так, если число стран не больше 40. Вскоре к исследованиям подключились компьютеры, и в 1976 году американцы Аппель и Хакен объявили, что с по-

мощью компьютеров им удалось найти решение задачи. Это заявление было воспринято без энтузиазма математиками, поскольку было невозможно проверить правильность многочасовой работы компьютера. В дальнейшем выяснилось, что в рассуждениях этих математиков имеется пробел и поэтому машина перебрала не все возможные варианты. Проблема осталась нерешенной.

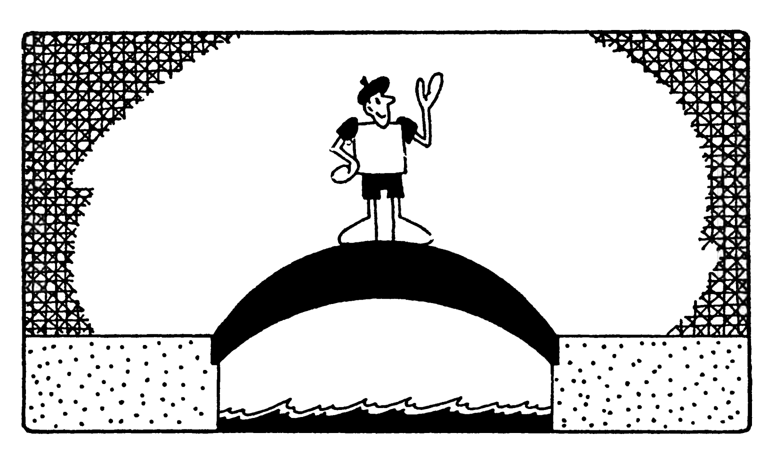
То, что для правильной раскраски любой карты достаточно пяти красок, не очень трудно установить. Впервые это сделал английский математик Хивуд в 1890 году. Довольно ясно, что количество красок для карт на плоскости и сфере одинаково, а вот для некоторых карт на поверхности бублика, который математики называют тором, нужно уже не меньше семи красок. Сделайте из пластилина бублик и попробуйте разделить его поверхность на 7 частей так, чтобы каждая из них граничила со всеми остальными, тем самым вы покажете, что меньше, чем семью красками не обойтись.

НЕМНОГО О ВЫПУКЛЫХ ФИГУРАХ

Помимо круга, квадрата, треугольников существует масса других геометрических фигур. Дать всем им название не представляется возможным. Поэтому, как в биологии, где растения и животных разделяют на клас-

сы, геометрические фигуры разделяют на классы фигур, похожих между собой. Одним из таких классов являются выпуклые фигуры.

Слово «выпуклый» не является для нас новым. Однако попробуйте дать этому понятию четкое определение, и вы увидите, что это не так просто. Посмотрим, как это делается в «Словаре русского языка» С.И.Ожегова. Читаем: «Выпуклый — имеющий дугообразную поверхность, обращенную наружу». А что значит «дугообразный»? Читаем: «Дугообразный — имеющий форму дуги». Что же такое дуга? «Дуга — часть окружности, круга или кривой линии». Тут наше терпение лопается, поскольку линии могут



быть самыми разнообразными. Будет ли треугольник выпуклой фигурой? Из приведенных «определений» ничего определенного сказать нельзя.

В математике понятие выпуклой фигуры имеет четко определенный смысл: фигура называется выпуклостью, если вместе с любыми двумя ее точками A и B этой фигуре принадлежит весь отрезок AB. Теперь ясно, что треугольник — выпуклая фигура, а четырехугольники бывают как выпуклые, так и не выпуклые (рис.1).

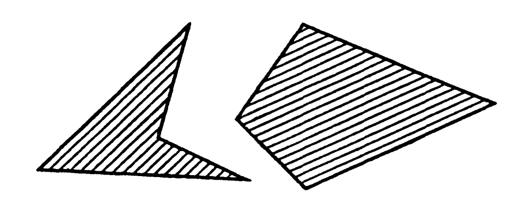


Рис. 1

А какие теоремы можно доказать про выпуклые фигуры? Таких теорем много. Вот две простейшие.

Общая часть двух выпуклых фигур сама является выпуклой фигурой. Доказательство этого утверждения совсем простое: возьмем две точки A и B, принадлежащие как первой фигуре, так и второй. Но так как эти фигуры выпуклые, то отрезок, соединяющий точки A и B принадлежит и первой и второй фигуре, значит, он принадлежит их общей части.

Вторая теорема доказывается более сложно, но факт, содержащийся в ней, гораздо неожиданнее. Если на плоскости задано не-

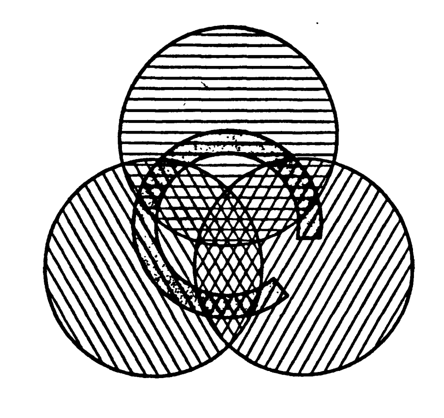


Рис. 2

сколько плоских фигур, каждые три из которых имеют общую точку, то найдется точка, принадлежащая всем этим фигурам.

Требование выпуклости здесь очень важно. Ведь четыре фигуры на рис. 2, из которых только одна выпуклая, таковы, что у любых трех найдется общая точка, и в то же время нет точки, общей всем четырем фигурам.

Если рассмотреть набор выпуклых фигур такой, что каждые две фигуры имеют общую точку, то мы не можем гарантировать наличие общей точки для всех этих фигур. Пример изображен на рис. 3.

Для выпуклых тел в пространстве теорема верна, но с небольшой поправкой: набор выпуклых тел имеет общую точку, если любые четыре тела имеют общую точку.

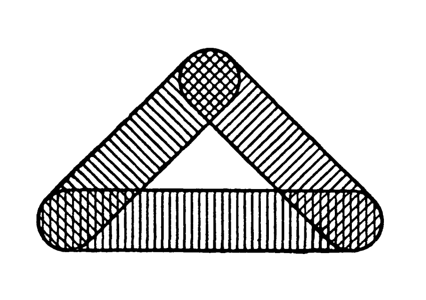


Рис. 3

Эта теорема была сформулирована и доказана в 20-х годах нашего столетия, когда выяснилась важная роль выпуклых фигур в приложениях математики к разным областям знаний, особенно к экономике. Доказал эту теорему австрийский математик Э.Хелли.

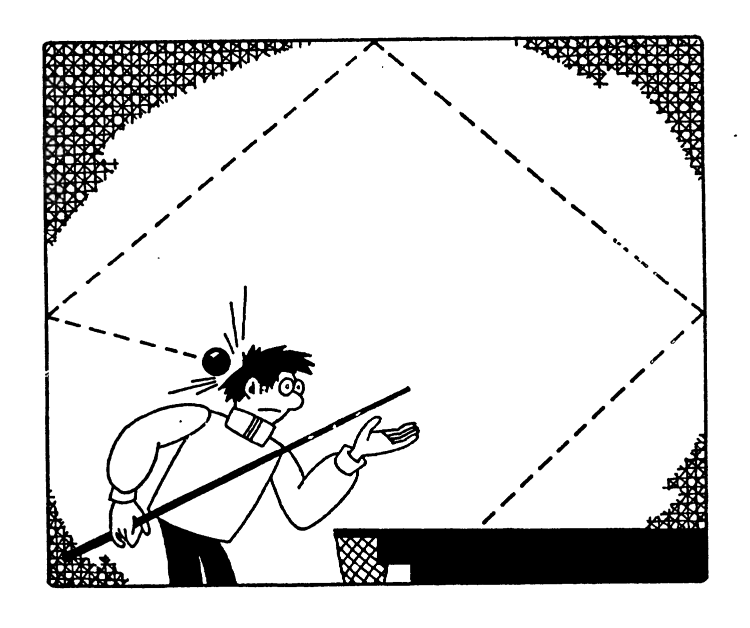
БИЛЬЯРД

Игру на бильярде любят многие, жаль лишь, что бильярдных столов не так много, как хотелось бы. Игра на бильярде требует не только верного глаза и сильного удара, но и точного расчета. Легендарный маршал С.М.Буденный говорил: «Играя на бильярде, я беру уроки физики и геометрии». В бильярдной игре много тонкостей, связанных с ударами не по центру шара, а вбок или сверху, что заставляет шар вращаться, а это делает траекторию шара криволинейной. Такие эффекты были описаны известным физиком Кориолисом в книге «Математическая теория бильярдной игры».

Мы здесь рассмотрим простейшие свойства бильярда — движение одного шара после удара в горизонтальном направлении, проходящем через центр шара. Казалось бы, здесь мало интересного и полезного для игры, но это не так, вы видите немало любопытных ситуаций.

Начнем с прямоугольного бильярда и решим следующую задачу. На поле бильярда стоит шарик. В каком направлении следует его пустить, чтобы, ударившись об один из бортов, он попал в заданный угол бильярда?

Основным свойством траектории шарика является тот факт, что шарик отскакивает от борта под тем же углом, под которым он ударяется о борт. Угол падения равен углу отражения — этот факт справедлив как для луча света, так и для бильярдного шара. Если бы около этого борта бильярда стояло зеркало, то движение шара в зеркале было бы продолжением прямолинейного движения шара до удара. Сначала заметим, что



для попадания в угол шарик может удариться лишь об один из двух бортов. Нарисуем два отраженных изображения бильярда (рис.1) и на них проведем прямые, соединяющие начальное положение шарика с изображением указанного угла. Затем зеркально отразив полученные отрезки относительно бортов, получим искомые траектории движения шарика.

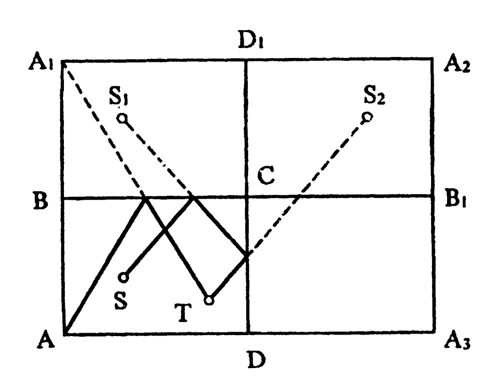


Рис. 1

На этом же рисунке изображено решение другой задачи: пустить шарик S так, чтобы, отразившись от бортов BC и CD, он ударился об шарик T. Принцип решения тот же: отражаем точку S относительно отрезка BC. Затем эту точку S_1 отражаем относительно отрезка CD. Полученную точку S_2 соединяем с точкой T и восстанавливаем траекторию шарика на бильярде, отражая полученные

куски отрезка сначала относительно прямой CD, а затем относительно прямой BC.

Рассмотрим еще одну геометрическую задачу, связанную с бильярдом. Из некоторой точки A квадратного бильярда пускается шарик параллельно одной из диагоналей квадрата. Из другой точки бильярда M, одновременно пускается второй шарик с той же скоростью и в том же направлении (параллельно движению первого). Через некоторое время шарики сталкиваются. Где мог находиться второй шарик? Описать это геометрическое место точек.

Чтобы решить эту задачу, следует сначала нарисовать траекторию движения первого шарика (рис. 2). Это прямоугольник со сторонами, параллельными диагоналям квадрата. Если пустить второй шарик из точки M, лежащей на той стороне прямоугольной траектории, которая противоположна точке A (рис.3), то он начнет двигаться навстречу первому шарику по его траектории и шарики столкнутся.

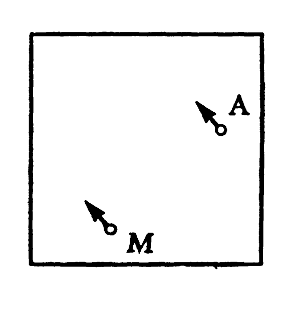


Рис. 2

Мы нашли все возможные точки? Нет! Давайте нарисуем траекторию движения некоторого шарика, пущенного параллельно одной из диагоналей квад-

рата. Это будет еще один прямоугольник. Два полученных прямоугольника пересекаются в четырех точках. В них и может происходить столкновение, если путь второго шарика до точки пересечения равен пути первого шарика до этой точки. Теперь уже нетрудно определить возможные начальные положения второго шарика. Это будут отрезки прямых, проходящих через точку A, параллельно диагоналям квадрата (рис. 4).

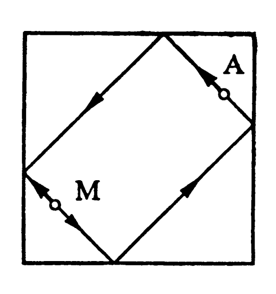


Рис. 3

А что можно сказать о движении шарика внутри круглого бильярда? Он будет двигаться по ломаной линии, все отрезки которой находятся на одинаковом расстоянии от центра.

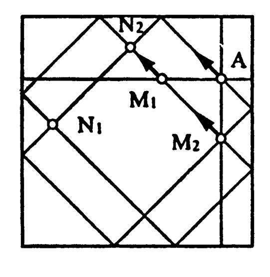
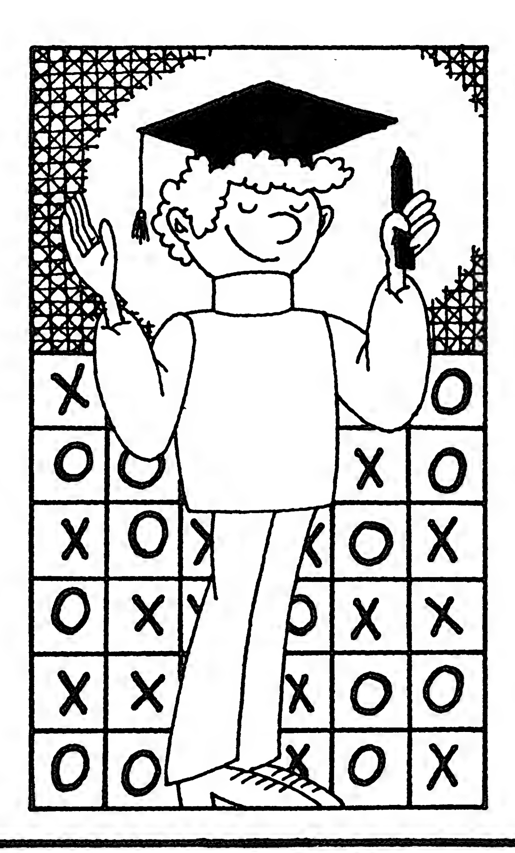


Рис. 4

Математики рассматривают траектории движения шарика на бильярдах с более сложными конфигурациями бортов. Зачем? А затем, что решение таких задач помогает понять закономерности дви-

жений молекул газа в сосудах, ведь молекула отражается от стенок сосуда точно так же, как шар от бортов бильярда, а это важно во многих областях физики, в частности в квантовой электронике.

ЛОГИКА

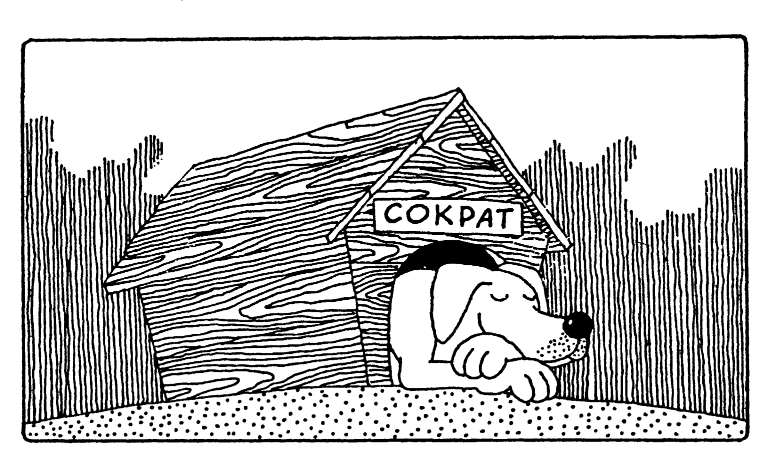


ЛОГИКА

Логика ведет свое происхождение от ораторского искусства. Убедить собеседника невозможно, если оратор сам себе противоречит (уж если ты сказал, что снег белый, не следует ссылаться на его черноту...). В Древней Греции, где важнейшие вопросы решались на советах, всякий уважающий себя философ, политический деятель или литератор старался строить речь так, чтобы она была доходчива и разумна. В античном мире чрезвычайно ценилось умение высказываться точно, кратко и остроумно. Недаром, зачастую не имея никаких данных о жизни многих выдающихся древних мудрецов, мы тем не менее знаем о них хотя бы по одному афоризму, некогда произнесенному ими. Как жил Евклид, чем интересовался, кроме геометрии? Неизвестно; зато все знают, как он ответил ученику, спросившему: «Какая польза будет мне от изучения математики?» Разгневанный Евклид позвал слугу и сказал: «Дай ему грош, он ищет выгоды, а не знаний!»

Любовь к точной фразе привела древнегреческих философов к логике. Что из чего следует и почему? Можно ли, например, утверждать, что Сократ смертен, если дано,

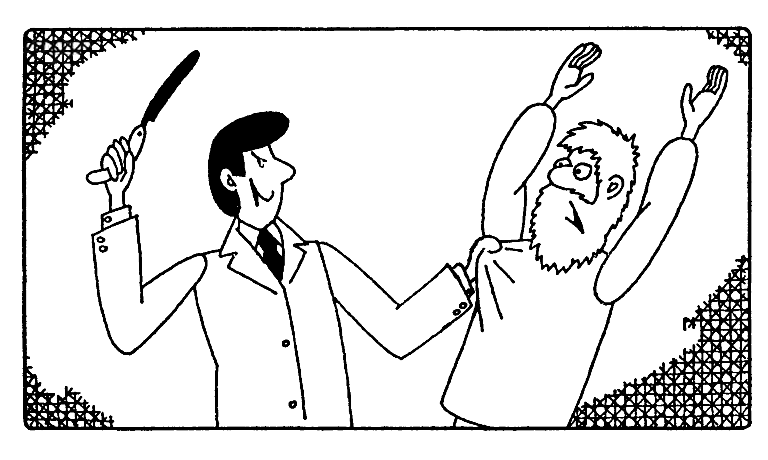
что все люди смертны и Сократ человек? Можно. А если дано, что все люди смертны и Сократ тоже смертен, верно ли, что Сократ человек? Неверно: вдруг Сократом зовут не только греческого мудреца, но и, скажем, его собаку?



Законы логики, правила вывода верных утверждений из заданных посылок наиболее полно исследовал великий древнегреческий философ Аристотель (кстати, он был учителем Александра Македонского).

Исследование всевозможных логических цепочек (**силлогизмов**) привело к обнаружению знаменитых парадоксов. Вот парадокс лжеца: «Я — лжец,» — говорит некто и... впадает в неразрешимое противоречие! Ведь если он действительно лжец, он солгал, говоря, что он лжец, и, следовательно, он не лжец; но если он не лжец, он сказал правду и, следовательно, он лжец... А вот не менее

известный парадокс брадобрея: некий брадобрей бреет тех и только тех, кто не бреется сам; бреет ли он сам себя? Если он бреется сам, то он не может себя брить, ибо бреет только тех, кто не бреется сам; если он не бреется сам, он должен брить и себя, ибо бреет всех тех, кто не бреется сам...



Пристрастие к логическим упражнениям, игре ума, оказало мощнейшее влияние на математику. Лишь в мире, где была развита наука об истинности и ложности высказываний, о правильности выводов, о том, что из чего может следовать и что не может, могло появиться доказательство. В сущности, чем отличаются две такие цепочки фраз:

1) Ночью все кошки серы. Мой зверь — кот. Значит, ночью он серый.

2) Треугольник с равными сторонами правильный. У этого треугольника все стороны равны. Значит, он — правильный.

Да ничем! Если первая и вторая фразы верны, верен и вывод. Именно так и была построена геометрия Евклида: несколько фраз объявлены верными; если же они верны, то истинны и все выводы, правильно построенные (по законам логики) на основе этих нескольких фраз...

АРИСТОТЕЛЬ
(384—322 до н.э.)

В 366 году до нашей эры в Академии Платона появился новый ученик. Он был родом из Стагира, и было ему 18 лет. Ученика звали Аристотель.

Почти 20 лет провел Аристотель в Академии. Из ученика он превратился в мудреца-философа, соперничавшего в знаниях и глубокомыслии с самим Платоном. Это соперничество подчас становилось весьма острым, но ни разу научные споры Платона с Аристотелем не переросли в личную вражду.



Аристотель

Вскоре после смерти Платона Аристотель покинул Академию. Македонский царь Филипп пригласил его воспи-

тывать царевича Александра. В 335 г. до н.э. Аристотель вернулся из Македонии в Афины, где основал собственную школу. Ее название — Ликей — вошло впоследствии в латинский и во многие другие языки, изменившись на одну букву: **лицей.**

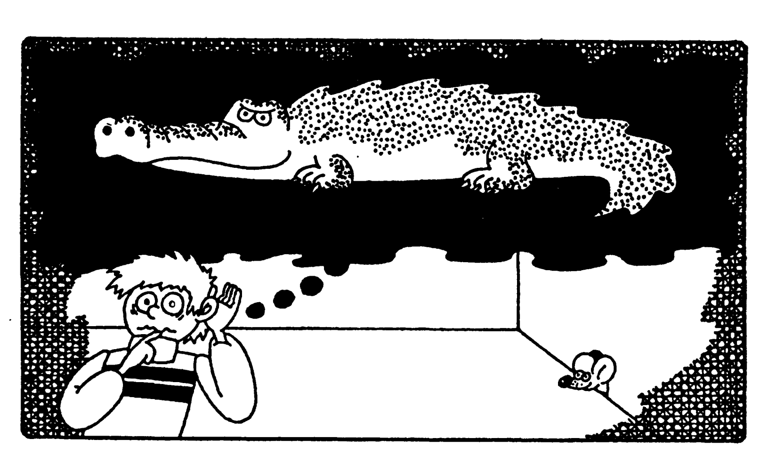
Вслед за Платоном, Аристотель считал, что достоверное знание может и должно быть выведено из исходных, несомненных истин — **аксиом** — при помощи логических рассуждений. Но Аристотель пошел дальше Платона: он описал законы логики, которые позволяют переходить от одного исинного суждения к другому без риска совершить ошибку.

Вот несколько законов, сформулированных Аристотелем. Всякое суждение либо истинно, либо ложно. Ни одно суждение не может быть истинным и ложным одновременно. Из общих утверждений следуют частные (например, из того, что все люди смертны, следует, что Сократ тоже смертен).

За свою жизнь Аристотель написал несколько десятков книг, охватив почти все доступные для его времени области знания. Среди его трудов — сочинения по физике, биологии, экономике, политике, поэзии... В течение многих веков научный авторитет Аристотеля был непререкаем.

Всякое высказывание может быть истинным или ложным. Третий вариант трудно себе представить, поэтому древнегреческие философы и пользовались «принципом исключенного третьего» — считали, что не может утверждение быть и не истинным, и не ложным. Вслед за ними так считаем и мы. Логика без принципа «исключенного третьего» упоминается разве лишь в фантастических романах, да и то в шутку...

А теперь попробуем собрать одно высказывание из двух частей. Как мы часто это делаем, соединим две фразы словечком «или». «В углу шуршит мышь или крокодил». Верно ли это высказывание? Зависит от того, кто на самом деле шуршит в углу. Если это и вправду мышь, фраза верна. Если (как ни трудно себе такое представить) это



крокодил, опять же высказывание верно. Если в углу дружно шуршат мышь с крокодилом, она верна снова! И лишь если в углу нет ни мыши, ни крокодила, а шуршит сбежавший из клетки хомяк, высказывание оказывается ложным. Это — свойство, присущее именно «или»: два утверждения, связанные этим словом, составляют верное высказывание, если хотя бы одно из утверждений справедливо, и ложное, если оба утверждения неверны. А теперь составим маленькую табличку (здесь И — «истинное утверждение», Л — «ложное»):

И или И = И,
И или Л = И,
Л или И = И,
Л или Л = Л.

Сравним теперь, как себя ведет связка «и». Разберем пример: «Мимо окна летят воробей и летающая тарелка». Если за окном нет ни воробья, ни тарелки, это высказывание ложно. Если воробей есть, а тарелки нет — оно все равно ложно. Если есть тарелка, но нет воробья — то же самое. И лишь одновременное присутствие обоих означает, что фраза истинна. Вот таблица истинности для словечка «и»:

И и И = И,
И и Л = Л,
Л и И = Л,
Л и Л = Л.

Фраза, связанная этим словом, верна в том единственном случае, когда верны обе части!

В этом тексте несколько раз употреблялась конструкция фразы «если так, то будет эдак». Посмотрим, когда верно утверждение такого типа? Оно верно, если верна первая часть (**посылка**) и одновременно верна вторая (**заключение**). Оно неверно, если верна посылка, но неверен вывод: несомненно ложным является высказывание «если разбить чашку, то будет землетрясение». А если посылка неверна? Может показаться невероятным, но в этом случае высказывание истинно. Из ложной посылки следует что угодно! На самом деле ничего удивительного в этом нет: вам самим случалось, и не раз, употреблять фразы вроде «если 2·2=5, то я папа римский». Попробуйте доказать, что такое утверждение ложно! Оно означает лишь, что 2·2 не равно пяти, и вы не папа римский, следовательно, оно истинно. Получим такую таблицу истинности:

И → И = И,
И → Л = Л,
Л → И = И,
Л → Л = И.

«И» и «или» — это элементарные действия логики, так же как сложение и умножение — это действия арифметики. Между логическими и арифметическими операциями есть некоторое сходство, и сейчас мы его

продемонстрируем. Пусть у нас только две цифры, 0 и 1. Будем обозначать истину единицей, а ложь — нулем. Тогда наша табличка истинности для «или» напоминает таблицу двоичного сложения: 0 + 0 = 0; 1 + 0 = 1; 0 + 1 = 1, и только для «сложения» двух истин (1+1=1) мы получим не тот ответ, который дает нам двоичная арифметика (там 1+1=10), но по большому счету он не слишком сильно отличается от арифметического, ибо нуля мы не получим все равно. Результат же логического умножения — «и» — полностью совпадает с арифметическим: 0·0 = 0, 1·0=0, 0·1=0, 1·1=1...

Аналога операции «если» на первый взгляд в арифметике нет. Но если ввести еще одно логическое действие, не рассмотренное нами подробно — «не», отрицание, устроенное чрезвычайно просто (не истина есть ложь, не ложь есть истина, т.е. в чистом виде закон исключенного третьего), — оказывается, можно выразить «если» через «или», «и» и «не». В самом деле, конструкция «А и В, или не А» ведет себя точно так же, как «если А, то В». Если А истинно, то не А ложно, и истинность всего высказывания зависит от истинности В; если же А ложно, то не А истинно, и независимо от истинности или ложности В высказывание будет верным.

Мы не зря упомянули здесь арифметическую аналогию логических операций. По-

скольку можно (с некоторыми поправками) выразить цифрами и арифметическими знаками истинность или ложность высказываний, то можно научить логике вычислительную машину. Ей будут доступны все логические рассуждения, сколь угодно сложные — нужно лишь выразить их через «и», «или» и «не». И вычислительная машина будет мыслить? Ну, не совсем самостоятельно — ей понадобятся предварительно написанные «рассуждающие программы», но она будет безошибочно судить о правильности наших выводов с точки зрения «железной логики» и делать выводы сама...

ПЛАТОН

К четвертому веку до нашей эры греческая наука накопила множество разнообразных фактов и методов. Казалось, ничто не может сдержать людей в познании окружающего мира. И только самые проницательные мудрецы осмеливались задавать вопрос: а насколько достоверны наши знания?

Наиболее известным среди этих сомневающихся стал Сократ. «Я знаю только то, что я ничего не знаю, — говорил он. — А другие не знают даже этого.» Искусный спорщик, он поставил в тупик немалое число людей, гордившихся своей ученостью. Эти споры происходили в Афинах при большом

стечении публики, и Сократ приобрел множество учеников и поклонников. Одного из них, юношу из знатного афинского рода, звали Платоном.



Сократ

Враги Сократа обвинили его в непочтении к богам и в развращении нравов молодежи. На суде Сократ де́ржался, по обыкновению, независимо и насмешливо. Его признали виновным и приговорили к смерти.

Несправедливый приговор и гибель учителя предопределили всю дальнейшую судьбу Платона. Он покинул Афины и более десяти лет путешествовал по разным странам Средиземноморья. Знакомство с виднейшими математиками того времени, идейными наследниками пифагорейцев, привело Платона к мысли о принципиальном отличии математических теорем от знаний, полученных опытным путем.

Металлический шар — это не совсем шар, он имеет дефекты. То же самое можно сказать и о других материальных шарах. Но все эти тела — ухудшенные копии идеального, совершенного шара, который и яв-

ляется предметом изучения геометров. Другие геометрические понятия также принадлежат к миру совершенных идей.

А раз так — в геометрии категорически запрещены рассуждения, использующие механические, физические и, вообще, какие бы то ни было основанные на опыте соображения. Только умственные рассуждения, только логика! Эти правила игры жестки и порой обременительны, но приобщение к миру совершенных идей того стоит!

Вернувшись в Афины, Платон основал научную школу — Академию. Перед ее входом был начертан девиз: «Да не войдет сюда не знающий геометрии». Академия дала миру нескольких ярчайших мыслителей — упомянем «отца логики» Аристотеля и одного из первых систематизаторов математики Евдокса.

Основная философская идея Платона — противопоставление несовершенных реальных явлений их идеальным сущностям — безусловно, сыграла положительную роль. Авторитет Платона принуждал математиков искать теоретические решения задач, не ссылаясь на результаты опытов. Так, например, механик Архимед мог найти отношение объемов шара и цилиндра экспериментально, погружая тела в воду. Но математик Архимед вынужден был создать для решения той же проблемы хитроумнейший метод, ценность которого выходила далеко за рамки задачи о шаре и цилиндре.

ЗАДАЧА О КОЛПАКАХ

Три дамы едут в поезде через туннель. Паровоз дымит, и на лицах дам оказываются пятна сажи. Поезд выбирается из туннеля, в купе снова становится светло, и леди начинают весело смеяться, глядя друг на друга. Потом одна задумывается: «Неужели миссис Джонс не понимает, что над ней смеются?.. О боже, они обе смеются надо мной!»



Эта маленькая история — один из простейших вариантов логической задачи, известной как задача о колпаках. Она возникла задолго до появления паровозов. Есть несколько колпаков разных цветов. В темноте их надевают на головы нескольких человек, затем зажигают свет. Каждый «околпаченный» может видеть колпаки своих товарищей, но не может видеть тот, что надет на

него самого. Требуется догадаться, какого цвета колпак на вашей собственной голове.

Если колпаков ровно столько, сколько испытуемых, тут и думать нечего. Но если, скажем, участников эксперимента трое, а колпаков пять (например, два синих и три красных)? Зажигают свет, и вы видите на одном из ваших товарищей красный колпак, а на другом синий. Какой на вас самом? Давайте рассуждать. Если бы на вас был синий колпак, тот, кто сидит в красном колпаке, видел бы оба синих и сразу бы сказал, что на нем красный колпак, но он молчит. Значит, он не видит двух синих колпаков, следовательно, на вас — красный. А теперь представьте, что на обоих ваших товарищах красные колпаки! Они мучительно думают и ничего не могут сказать? Но мы только что выяснили, что если на одном из вас синий колпак, вывод можно сделать почти сразу. Смело говорите, что на вас красный колпак, — иначе один из ваших товарищей уже догадался бы, что у него на голове.

Эта задача изучена вдоль и поперек. Если вы подумаете немного, вы поймете, как решить задачу, если людей в колпаках больше, синих колпаков на один меньше, чем участников эксперимента, а красных сколько угодно. Единственный случай, когда никто не может сделать никаких выводов — если и синих, и красных колпаков не меньше, чем «околпаченных»...

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Знаете ли вы, что среди зрителей, сидящих в Большом театре во время спектакля, обязательно есть люди, родившиеся в один и тот же день одного и того же месяца? Считайте сами: в зале Большого театра 2000 мест. И даже если не все они заполнены (что в этом знаменитом театре бывает нечасто), можно смело утверждать, что на спектакле собралось более 366 человек. Но 366 — это максимально возможное число дней в году, считая 29 февраля. Итак, для 367-го зрителя просто не остается свободной от дней рождений его соседей по залу даты в году.

Просто? Тем не менее это рассуждение даже имеет свое название в математике: **принцип Дирихле** (в честь немецкого математика П.Г.Л.Дирихле). По традиции принцип Дирихле почему-то всегда объясняют на примере кроликов в клетках: если общее число кроликов больше числа клеток, в одной из клеток наверняка сидит более одного кролика.

Этим принципом в неявном виде пользовался, например, **Ферма** в XVII веке; но широко применяться в доказательствах он стал лишь с прошлого века! Несмотря на свою простоту, это рассуждение оказалось чрезвычайно плодотворным. Вот только один пример. Если делить одно целое число на другое, например 1 на 7, что мы получим?

Будем делить в столбик, получая все новые и новые остатки. Но поскольку остатками от деления на 7 могут быть лишь числа 1,2,3,4,5,6 и 0, мы либо должны на каком-то шаге получить 0 и остановиться, либо после шестого деления один из остатков обязан повториться (клетки кончились, а кролики все прибывают!). Дальше делить нет смысла — этот остаток мы уже разделили на 7, и все результаты у нас перед глазами. Ясно, что деление будет продолжаться бесконечно, но мы будем получать снова и снова одну и ту же последовательность цифр — период.

Выходит, при делении целого числа на целое мы получим либо конечную десятичную дробь, либо периодическую — и более ничего!

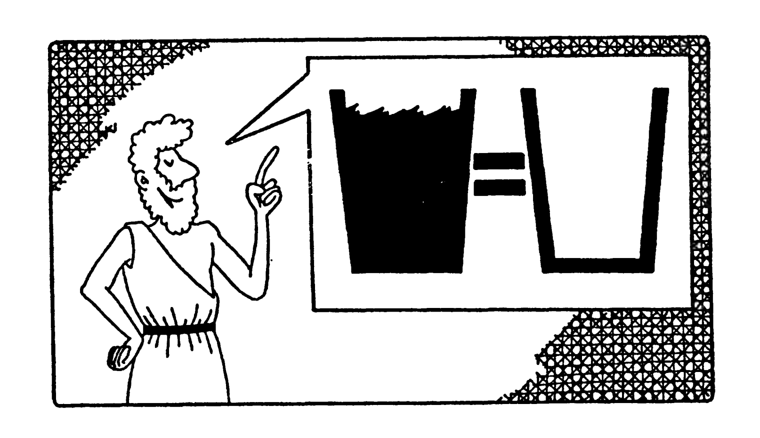
СОФИЗМЫ

Можно ли доказать, что 0 = 1? Думаете, нет? А что вы скажете о следующем рассуждении:

«Если половина чего-либо одного равна половине чего-либо другого, то одно равно другому. Но полупустое ведро — то же самое, что и полуполное. Значит, пустое ведро и полное ведро — одно и то же.»

Вы считаете, что вас обманывают? Потрудитесь указать, в каком именно месте. Первое предложение верное, второе — то-

же. И вывод сделан по всем законам логики...



В статье «Иллюзии» рассказано, как нас обманывает зрение. Но, как видите, и здравый смысл тоже может привести к совершенно абсурдным выводам — если произвольно смешивать математические понятия с житейскими соображениями.

Именно такая смесь и была в употреблении у древних греков в V веке до нашей эры. Не случайно как раз в это время вошла в моду софистика — искусство ведения спора. Многие умные, но не очень честные люди жадно ухватились за возможность «строго логически доказывать», что черное — это белое, добро — это зло, истина — это ложь...

Однако нет худа без добра. Появление софизмов — рассуждений, правдоподобных в каждом куске, но вопиюще неверных в це-

лом — заставило математиков задуматься о логическом строении геометрии и арифметики.

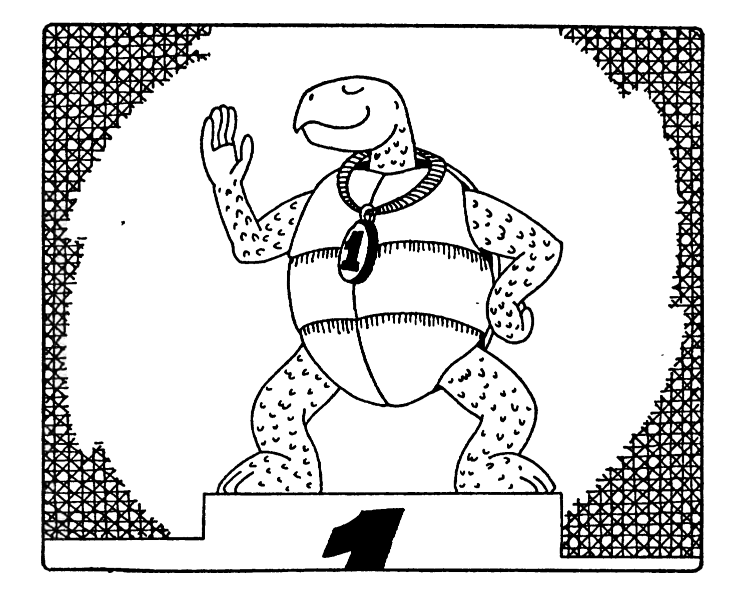
Наиболее серьезную роль сыграли математические софизмы, или апории, придуманные в V веке до нашей эры мудрецом Зеноном из южноитальянского города Элеи. Вот одна из них: «В каждый момент времени летящая стрела неподвижна. Значит, она неподвижна во все моменты времени, и ее движение никогда не сможет начаться».

Что такое «момент времени» с точки зрения формальной математики, стало ясно только в XIX веке, когда усилиями Коши, Вейерштрасса, Дедекинда и других ученых была построена логически непротиворечивая теория действительных чисел. Кстати, в конце того же XIX века апория Зенона о стреле была удивительным образом отражена в технике: братья Люмьер создали кинематограф.

АХИЛЛЕС И ЧЕРЕПАХА

Вспоминая о Зеноне Элейском, нельзя не рассказать о самой эффектной из его апорий, в которой быстроногий Ахиллес и медлительная черепаха соревнуются в беге. Ахиллес дает черепахе фору, и забег начинается. Зенон утверждает, что Ахиллес никогда не догонит черепаху.

Он рассуждает так: за время, которое понадобится Ахиллесу, чтобы добежать до ме-



ста старта черепахи, она тоже сдвинется на какое-то расстояние. К тому моменту, когда Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха снова чуть-чуть уйдет вперед. И так до бесконечности.

Затруднение Зенона состоит даже не в том, что сумма бесконечного числа слагаемых оказывается конечной (например, мы знаем, что

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = 1{,}1111\ldots = 1\frac{1}{9}).$$

Можно ли вообще составлять арифметические выражения, содержащие бесконечное число действий? И можно ли говорить о моменте времени, который наступает уже после всех моментов с номерами один, два, три, ..., миллион?.. Сказать, что Ахиллес догонит

черепаху в «момент номер бесконечность»? А как занумеровать моменты дальше?

На все Зеноновы «можно ли»? современная математика отвечает примерно так: «Можно, но только осторожно». Разработана **теория бесконечных рядов**, вроде того что описан выше, обоснованно **интегрирование** — суммирование бесконечного числа непрерывно меняющихся слагаемых. Появилась **теория трансфинитов** — упорядоченного множества величин, в котором натуральные числа составляют натуральный кусок. И всякий раз математики вынуждены были прибегать к громоздким рассуждениям, чтобы описать все это точно, аккуратно, без логических противоречий.

ЗАДАЧА ФЛАВИЯ

Иосиф **Флавий**, знаменитый писатель первого века нашей эры, был также одним из вождей восставшей Иудеи. Об Иудейской войне (66—73 гг) он написал знаменитую книгу, в которой рассказал и историю своего пленения Титом Флавием Веспасианом, тогда — полководцем, а впоследствии римским императором.

Римские войска, пришедшие усмирять мятеж в провинции Иудея, осадили галилейскую крепость Иотапату, гарнизоном которой в тот момент командовал Иосиф. В крепости в достатке было продовольствия,

но не было источников воды, и защитники собирали и использовали дождевую воду. По всем подсчетам, длительную осаду крепость выдержать не могла, и римляне предполагали взять ее за одну — две недели. Они просчитались — Иотапата продержалась «семь раз по семь дней», но в конце концов пала. Последние защитники укрылись в пещерах; в одной из таких пещер спрятался и Иосиф вместе с сорока знатными иудеями. И тут между обитателями пещеры вышел спор: Иосиф настаивал, что нет позора в сдаче в плен, но его товарищи считали, что лучше умереть, чем стать римскими рабами. Чтобы не сдаться живыми и одновременно не впасть в грех самоубийства, в конце концов решили бросать жребий, и каждый, на кого он укажет, должен был быть убит следующим по очереди. «По счастливой случайности, а может быть, по божественному предопределению, остался последним именно Иосиф еще с одним. А так как он не хотел ни самому быть убитым по жребию, ни запятнать свои руки кровью соотечественника, то убедил и последнего сдаться римлянам и сохранить себе жизнь», — пишет Иосиф в «Иудейской войне», называя себя самого в третьем лице, как было тогда принято.

Эта история породила впоследствии «задачу Флавия». Видимо, в божественное предопределение не очень верилось, и многие за-

давались вопросом: как удалось хитроумному Иосифу подстроить так, чтобы именно он в конце концов уцелел? По сведениям, сообщенным самим Флавием, трудно понять, как именно разыгрывалась «очередь на смерть», но в конце концов утвердилось мнение, что обитатели пещеры попросту считались, как это делают дети. Так возникла «задача Флавия»: если считать до одного и того же числа, каждый раз выводя из круга того, на ком закончился счет, и начиная считать вновь со следующего за выбывшим, кто останется в круге последним?

Понятно, что при таком счете играет роль последовательность остатков от деления одного и того же числа на все уменьшающиеся числа. Понятно также, что место последнего невыбывшего определяется только количеством стоящих в круге, количеством слов в считалке и тем, с кого первого начали считать. Посмотрим, как идет процесс счета для небольших чисел. Если в круге стоят только двое, ясно, что ответ зависит от четности числа, до которого идет счет (для краткости будем говорить «четность считалки»): если оно нечетно, выбывает тот, с кого начали считать, если четно — второй. Если в круге трое, ответ зависит от делимости на 3 количества слов в считалке: если оно делится на 3, после первого круга выбывает тот, кто стоит третьим от человека, с которого начался счет; если оно дает при делении на

3 в остатке 1, выбывает тот, с кого начался счет, и если оно дает в остатке 2, выбывает человек, стоящий вторым от начала отсчета; но затем задача сводится к предыдущей, и окончательный результат зависит также и от четности считалки. Ясно, что если в круге стоят четверо, свой вклад вносит остаток от деления на 4, но роль остатков от деления на 3 и 2 остается. Таким образом, Иосифу Флавию пришлось, вероятно, крепко подумать, чтобы сделать необходимый расчет для сорока одного человека! Впрочем, он мог, смоделировав ситуацию на камушках, выяснить, который остается последним в круге, и смело встать на нужное место, когда дошло до дела...

ВЫЧИСЛЯТЬ ИЛИ ПЕРЕБИРАТЬ?

Рассмотрим такую задачу: для каких двух натуральных чисел разность их квадратов равна 455? Обозначим одно из чисел через n, а второе через $n + k$. Разность их квадратов равняется 455, поэтому $2nk + n^2 = 455$. Как найти n и k, удовлетворяющие этому уравнению? Для начала разложим на множители левую и правую части уравнения: $n(2k + n) = 5 \cdot 7 \cdot 13$. Первое число слева меньше второго, поэтому оно может равняться либо 1, либо 5, либо 7, либо 13. При этом второй множитель равняется, соответ-

ственно, 455, 91, 65, 35. Осталось из полученных результатов найти второе число в каждом из этих четырех случаев. Это сделать совсем просто. Достаточно ко второму множителю прибавить первый и результат разделить на 2. Вы догадались почему? Получаем для второго числа значения 228, 46, 33 и 18.

Во многих областях науки, техники и экономики возникают задачи выбора наилучшего варианта среди тысяч других. Такие задачи обычно поручают решать вычислительным машинам, а математик инструктирует ее, как это нужно делать. Известный американский математик С.Голомб сказал по этому поводу: «В отличие от человека машина, решая задачи, производит однообразные вычисления, которые нам кажутся столь скучными, с невообразимой быстротой. Но вместе с тем она не заметит способа упростить или улучшить решение, если этот способ не будет заранее учтен программистом, составляющим детальные инструкции для работы ЭВМ».

На письменном вступительном экзамене в МГУ (физфак) однажды была предложена следующая задача.

«Куплено несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплачено 10 рублей 56 копеек. Сколько куплено книг, если цена одной книги более, чем на рубль превосходит цену альбома, а книг куплено на 6 больше, чем альбомов?»

Можно записать уравнение и неравенство, а затем пытаться их решать. А можно применить метод перебора. Раз книг куплено больше, чем альбомов, на 6, то книг куплено не меньше семи, а так как цена книги больше чем на рубль превосходит цену альбома, то каждая книга стоит больше рубля. Теперь вспомним, что было заплачено 10 рублей 56 копеек, значит, было куплено или 10, или 9, или 8, или 7 книг. Но число 1056 не делится ни на 10, ни на 9, ни на 7, а на 8 оно делится, значит было куплено 8 книг и 2 альбома.

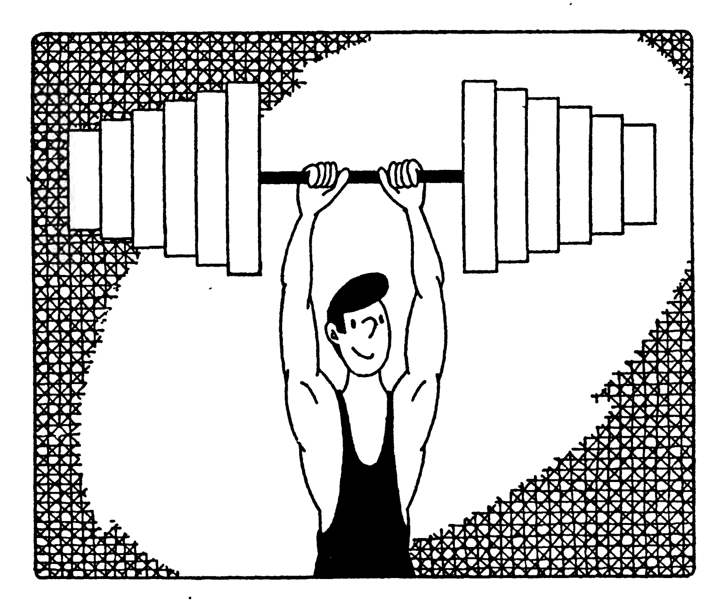
В заключение приведем пример задачи, требующей для своего решения очень большого перебора вариантов. Представьте, что автомобиль должен побывать в десяти магазинах, чтобы доставить туда порции товара. Как вы думаете, из скольких возможных вариантов должен выбирать шофер? Из 100? Из 1000? Оказывается из 362880 вариантов! Без ЭВМ шоферу остается надеяться лишь на свою интуицию.

ХАНОЙСКАЯ БАШНЯ

Эта игра пришла к нам из буддийских храмов, ее возраст исчисляется тысячелетиями. Наверное, от нее произошла детская игрушка — пирамидка, стержень с надетыми на него дисками разной величины. Пе-

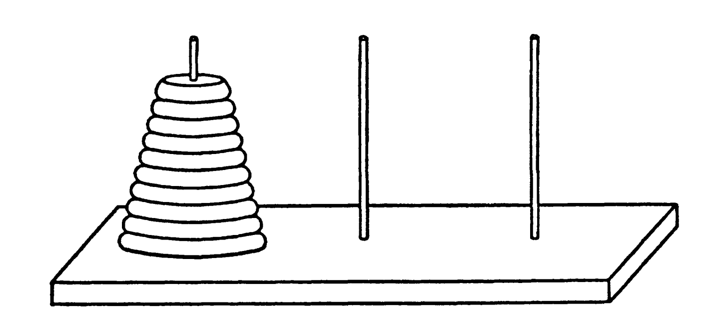
ренести эти диски с одного стержня на другой — задача посильная и трехлетнему малышу, но если мы возьмем еще один стержень (см.рис.) и разрешим снимать лишь по одному диску и класть их так, чтобы всегда сверху каждого диска лежали лишь диски, меньшие его, то без помощи третьего стержня никак не обойтись, да и с третьим стержнем эта задача совсем непроста.

Если у нас в пирамидке было всего 2 диска, то решение очевидно: положим первый диск на третий стержень, затем второй диск на второй стержень, третьим переносом мы кладем первый диск на второй. Итак, оба диска лежат на втором стержне и для этого нам понадобилось три переноса.



Пусть теперь в пирамидке 3 диска. Как их перенести на второй стержень? Чуть подумав, можно сообразить, что за 3 переноса мы, как и раньше, можем собрать два верхних стержня на третьем стержне. Затем кладем третий диск на второй стержень. Осталось уложить туда оба первых диска, что мы уже умеем делать за 3 хода. Мы выполнили задачу за 7 ходов, при этом два раза решали предыдущую задачу и сделали один дополнительный ход — перенос нижнего диска на второй стержень.

Теперь уже ясно, что пирамидку с 5 дисками можно переложить на второй стержень в соответствии с правилами за 15 ходов, при 6 дисках за 31 ход, при 7 дисках за 63 хода. А как устроена эта последовательность: 3, 7, 15, 31, 63,...? Нетрудно заметить, что каждый член этой последовательности на единичку меньше степени числа 2, причем эта степень равна числу дисков, участвующих в процессе.



Существует легенда, что в одном из буддийских храмов, затерянных в джунглях Индокитая, монахи усердно перекладывают с одного стержня на другой 64 диска и что по окончании этой работы погаснет Солнце. Посчитайте, сколько времени уйдет на эту работу, если монахи переносят по одному диску в секунду.

ЛЖЕЦЫ И ПРАВДИВЫЕ

Те, кто считает, что единственными персонажами математических задач являются Икс и Игрек, жестоко ошибаются. Страна Математия населена массой различных существ. Частенько математики посещают остров, на котором всего два города, в одном из которых живут лжецы, которые все время лгут, а в другом — правдивые, говорящие только правду.

Представьте себя на этом острове в одном из городов. Как узнать, в какой город вы попали: в город правдивых или в город лжецов? Дело в том, что различить лжецов и правдивых по внешнему виду невозможно, все они ходят друг другу в гости и в каждом городе можно встретить как лжеца, так и правдивого. Конечно же, можно остановить кого-нибудь из них, хорошенько расспросить, выяснить, правдив ли он, и потом постараться выяснить свое местопребывание.

Но жители этого города все время куда-то спешат. Ответив на ваш вопрос, они мчатся дальше по своим делам и уже не слышат следующего вашего вопроса.

На вопрос «Это город правдивых?» в любом из этих городов можно получить как ответ «Да», так и ответ «Нет». Но все-таки можно, задав лишь один вопрос и получив ответ, узнать, в каком городе вы находитесь. Вот этот вопрос: «Вы живете в этом городе?» Если вы находитесь в городе правдивых и спрашиваете правдивого, то получите ответ «Да», но тот же самый ответ даст вам и лжец, поскольку он соврет. А в городе лжецов каждый ответит на этот вопрос «Нет».

Представьте себе, что вы встретили трех аборигенов этого острова и обратились к одному из них с вопросом «Из какого вы города?». Ответ был очень тихим и вы его не услышали. Тогда вы обратились ко второму: «Что он сказал?». «Он сказал, что он из города правдивых» — был ответ. «А вы что слышали» — спросили вы у третьего. «Он сказал, что он из города лжецов» — ответил тот. Попробуйте теперь понять, кто из какого города и что сказал первый абориген.

Проще всего ответить на второй вопрос, поскольку на вопрос «Из какого вы города?» и лжец и правдивый ответят, что они из города правдивых. А теперь ясно, что второй сказал правду, а третий солгал.

Ну, а теперь представим, что собрались

в одной комнате десять аборигенов и произошел такой разговор. Первый сказал: «В этой комнате нет ни одного правдивого человека», второй сказал: «В этой комнате не больше одного честного человека», третий заметил: «В этой комнате не больше двух правдивых людей» и т.д. до десятого, который объявил: «В этой комнате не больше девяти правдивых людей». Сколько же на самом деле правдивых людей находилось в комнате?

Очевидно, что первый солгал и поэтому десятый сказал правду. Заметим также, что если кто-то сказал правду, то все следующие тоже сказали правду, а если кто-то солгал, то и все предыдущие тоже солгали. Теперь рассмотрим человека, первым сказавшего правду. Пусть его номер k, тогда в комнате $k - 1$ лжец и $11 - k$ правдивых. Но он сказал, что в комнате не больше $k - 1$ правдивого человека и это правда, поэтому $11 - k$ не превосходит $k - 1$, отсюда k не меньше шести. Теперь ясно, что первый абориген, который мог сказать правду, имеет номер шесть и поэтому в комнате было поровну правдивых и лжецов.

ВЗВЕШИВАНИЯ

Представьте себе такую ситуацию: перед вами десять мешков с монетами. В девяти мешках нормальные монеты массой по 10 граммов, а в десятом — фальшивые, весом по 9 граммов. Как найти мешок с фальшивыми монетами, если у вас есть весы со стрелкой, указывающей массу положенного на них груза?

Можно брать по одной монете из мешка и взвешивать их. Рано или поздно дойдет очередь и до мешка с фальшивыми монетами. Это может произойти и при первом и при десятом взвешивании. А нельзя ли гарантированно найти мешок с фальшивыми монетами за одно взвешивание? Оказывается, можно.

Для этого положим на весы одну монету из первого мешка, рядом с ней положим две монеты из второго мешка, три монеты из третьего мешка и т.д., из десятого мешка положим на весы десять монет. Если бы все монеты были нормальными, то общая масса этих монет составила 55 граммов, а так как среди монет есть фальшивые — более легкие, то масса окажется меньше на столько граммов, сколько положено фальшивых монет. Если, скажем, масса составит 47 граммов, то это значит, что на весах лежит 8 фальшивых монет и поэтому фальшивые монеты лежат в восьмом мешке. Итак, номер

мешка с фальшивыми монетами равен разности между 55 и количеством граммов, указанных на весах.

А если в каждом мешке по 9 монет, можно ли обнаружить мешок с фальшивыми монетами за одно взвешивание? Оказывается можно, причем почти также, как и раньше. Из одного мешка не будем брать монет и назовем этот мешок нулевым. Из первого мешка вновь возьмем одну монету, из второго две, из третьего три и т.д., из девятого девять. Взвесим все эти монеты. Если их масса окажется равной 45 граммам, то это значит, что все монеты на весах настоящие и фальшивые лежат в нулевом мешке, а если меньше 45 граммов, то номер мешка с фальшивыми монетами равен разности между 45 и количеством граммов, показанных на весах. Верно?

А теперь представьте себе, что вам поручили среди 24 монет найти фальшивую, которая легче остальных, и предоставили обычные двухчашечные весы. За сколько взвешиваний удастся найти фальшивую монету? Можно разбить монеты на пары и взвешивать эти пары, положив одну монету на одну чашку весов, а другую — на вторую чашку. За 12 взвешиваний таким образом можно найти фальшивую монету. А нельзя ли быстрее?

Оказывается найти фальшивую монету можно всего за три взвешивания. Вот как

это делается. Положим на одну из чашек 8 монет, на другую чашку еще 8 монет, а оставшиеся 8 монет отложим в сторону.

Если перетянет левая чашка, то фальшивая монета находится в правой чашке весов, если правая, то в левой, а если весы окажутся в равновесии, то это значит, что фальшивая монета находится в отложенной кучке монет. Таким образом, количество монет, на которые падает подозрение, уменьшилось в три раза: сначала каждая из 24 монет могла оказаться фальшивой, теперь таких монет лишь 8.

Положим 3 монеты из этих 8 на левую чашку, 3 на правую и две отложим в сторону. Снова ясно, что фальшивая монета на той чашке, которая оказалась легче, а в случае равновесия — среди двух отложенных.

Если фальшивая монета находится среди трех монет, то положив две из них на разные чашки весов определим ту, которая легче — фальшивую, а если весы окажутся в равновесии, то фальшивой является оставшаяся монета. Если фальшивая монета находится среди отложенных двух монет, то процедура ее нахождения еще проще.

В заключение, еще одна задача на взвешивание. Попытайтесь сначала решить ее сами, а потом уже прочесть решение. Требуется за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти среди шести монет одну фальшивую, при этом неизвестно, тяжелее она

настоящей или легче, но известно, что она имеет другую массу.

Решение начинается также, как и в предыдущей задаче: делим монеты на три кучки по две монеты, одну кучку кладем на правую чашку весов, вторую — на левую, а третью откладываем в сторону. Если весы в равновесии, то фальшивая монета среди двух отложенных, а на весах монеты настоящие. Сравним каждую из отложенных монет с настоящей монетой (на это нам понадобится еще два взвешивания) и определим, какая из них фальшивая и легче она или тяжелее настоящей.

Если перетянет одна из чашек весов, то это значит, что отложенные монеты настоящие, а фальшивая на весах, причем она тяжелее настоящей, если находится на перетянувшей чашке, и легче настоящей, если она находится на другой. Обозначим монеты на перетянувшей чашке через A и B, а на второй чашке через C и D. Напомним, что монеты A и B могут быть либо настоящими, либо более тяжелыми, чем настоящие, а монеты C и D — либо настоящими, либо более легкими, чем настоящие.

Второе взвешивание в этом случае произведем, положив на левую чашку весов монеты A и C, а на правую — монету B и одну хорошую монету из двух отложенных; монету D и вторую хорошую монету отложим в сторону. Если наступит равновесие, это значит, что на весах хорошие монеты, а

фальшивой является монета D, притом она легче настоящей монеты.

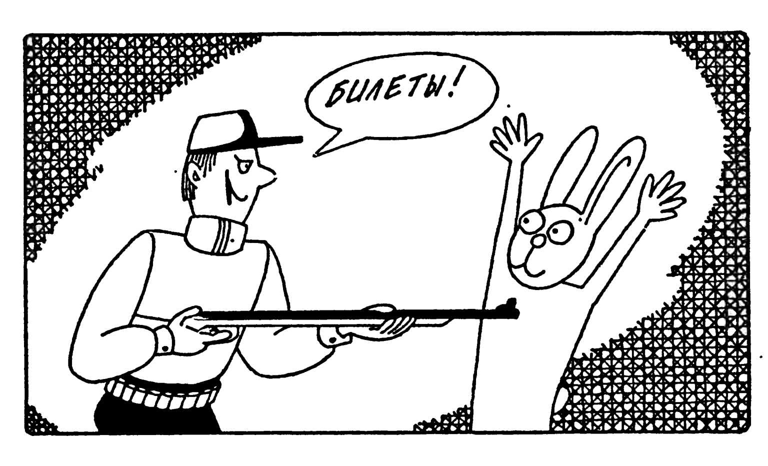
Если перетянет левая чашка, то фальшивой монетой является монета A и она тяжелее настоящей. Если же перетянет правая чашка, то возможны всего два случая: фальшивой (и более легкой) является монета C или монета B (и более тяжелой). Оставшимся третьим взвешиванием сравним монету C с хорошей монетой. Если перетянет хорошая монета, то монета C — фальшивая и более легкая, а в случае равновесия заключаем, что фальшивой является монета В и она тяжелее настоящей.

Эти задачи выглядят игрушечными, но они послужили основой создания большой ветви математики — теории информации. Математики задумались — какую информацию о монетах несет каждое взвешивание, нельзя ли выразить ее числом? Ответы на эти вопросы и дали толчок для развития теории информации, которая сейчас оказывает огромную помощь при расшифровке сигналов при наличии помех, при создании помехоустойчивых кодов для передачи сообщений и во многих других областях науки и техники.

РАЗМЕН ДЕНЕГ

В те не столь далекие времена, когда в автобусах, троллейбусах и трамваях стояли кассы, в которые бросали пятаки за проезд,

часто можно было видеть пассажира, бросившего в кассу 10, 15 или 20 копеек, и собирающего пятаки у новых пассажиров, чтобы получить сдачу. Эта ситуация породила немало математических задач. Вот простейшая. Входят в автобус двое. Ни у одного из них нет пятаков, но имеются монеты в 10, 15 и 20 копеек. Смогут ли они расплатиться за проезд?



По ходу дела хотим напомнить, что в русском языке эти монеты имеют специальные названия: **гривенник**, **пятиалтынный** и **двугривенный**. С гривенником и двугривенным более-менее все понятно, а слово пятиалтынный происходит от названия монеты в три копейки — алтын. Заодно напомним, что две копейки назывались «семишник», а полкопейки — «грош». Правда, к слову сказать, нынешний рубль не стоит и старого гроша.

Но вернемся к задаче. Вы, наверное, уже успели ее решить. Ясно, что один из пассажиров должен положить в кассу гривенник и получить от другого пятак. Но у того нет пятака, однако он теперь имеет дело не с кассой, которая лишь «глотает» монеты, а с человеком, который может дать сдачу. Дав ему 15, или 20 копеек, и получив, соответственно, 10 или 15 копеек сдачи, второй пассажир, как и первый, может со спокойной совестью оторвать билет в кассе.

А если пассажиров трое и ни у одного из них нет пятаков? И здесь выход из положения несложен. Один из пассажиров бросает в кассу 15 копеек, а двое других расплачиваются, как и в предыдущем случае, только 10 копеек они отдают первому, а не бросают в кассу.

Теперь становится ясным, что любое количество пассажиров смогут расплатиться за проезд, не имея пятаков, а располагая лишь монетами в 10 и 15 копеек. Они разбиваются на пары, а если их нечетное число, то образуется одна тройка пассажиров и уплата производится так, как было описано выше.

Каким наименьшим числом 15-копеечных монет можно при этом обойтись в случае n пассажиров? Мы показали, что при четном количестве пассажиров достаточно, чтобы у половины пассажиров нашлось бы хотя по одному пятиалтынному, а для нечетного их числа — $(n + 1)/2$ пятиалтынных. Покажем,

что меньшим количеством не обойтись. Действительно, чтобы заплатить пятак, пассажир должен либо отдать 15 копеек, либо получить 15 копеек. В случае четного числа пассажиров, участвующих в процедуре, число пассажиров, уплативших проезд пятиалтынным, равно числу пассажиров, получивших такую монету, поэтому число 15-копеечных монет, перешедших из рук в руки, равно $n/2$. В случае нечетного числа пассажиров, в кассу должно попасть нечетное число раз по 5 копеек, поэтому туда должен попасть хотя бы один пятиалтынный. Если теперь считать кассу еще одним пассажиром, которому нужно дать пятиалтынный, то получим $(n + 1)$ пассажиров — четное число, и количество пятиалтынных, перешедших из рук в руки (или в кассу), будет равно $(n + 1)/2$. Доказательство окончено.

Эту тему можно продолжить, рассматривая, например, случай с монетами достоинством лишь в 15 и 20 копеек. Попробуйте разобраться с ним сами.

Другая задача о **размене денег** связана с недавно исчезнувшими бумажными купюрами в 3 и 5 рублей. Вопрос в этой задаче таков: «Какие суммы можно уплатить без сдачи купюрами в 3 и 5 рублей?»

Покупку в один и два рубля «трешками» и «пятерками» не оплатишь, а в три, пять и шесть рублей — можно оплатить. Четырехрублевую и семирублевую покупки снова

нельзя оплатить, а восьми-, девяти- и десятирублевые покупки можно оплатить этими купюрами, так как $8 = 3 + 5$, $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 5 + 5$.

А дальше? Оказывается, что дальше любую сумму денег можно оплатить этими купюрами. Действительно, добавив к полученным трем суммам по «трешке», получим 11, 12, и 13 рублей. Добавив еще по «трешке», получим 14, 15 и 16 рублей и т.д.

Ну, а если брать другие купюры? «Пятерками» и «десятками» можно уплатить без сдачи лишь сумму кратную пяти, вообще, если купюры в p рублей и k рублей, и числа p и k имеют общий делитель, отличный от единицы, то ими можно уплатить без сдачи только суммы, кратные этому делителю. Общее утверждение состоит в следующем: «Если имеется неограниченное количество купюр достоинством в p и k рублей, причем числа p и k взаимно просты, то любую сумму, большую $pk - p - k$ рублей можно уплатить без сдачи этими купюрами»

В случае «трешек» и «пятерок» получаем число $pk - p - k = 15 - 3 - 5 = 7$.

Размен денег — настолько частая операция, что возникают сплошь и рядом нестандартные ситуации, приводящие к интересным математическим задачам.

ПЕРЕЛИВАНИЯ

В жизни часто случаются ситуации, когда следует отмерить некоторое количество жидкости, а мерного сосуда с делениями нет, есть лишь две емкости известного объема. Такие ситуации породили ряд интересных математических задач. Они возникли много веков назад, но до сих пор вызывают интерес у любителей математики.

Вот одна из них. В бидоне находится 8 литров молока, имеется еще две банки, вместимостью 3 и 5 литров. Требуется отлить в пятилитровую банку 4 литра молока.

Вначале это кажется невозможным делом, однако попытаемся такое переливание совершить. Начать можно двумя способами: либо налить полную пятилитровую банку, либо полную трехлитровую банку.

Проследим первую возможность дальше. Выливать молоко обратно в бидон бессмысленно, поэтому нальем из банки молоко во вторую банку. Чтобы было удобнее следить за процессом переливания, будем рассматривать тройки чисел (x, y, z), где x — количество молока в бидоне, y — количество молока в пятилитровой банке, а z — количество молока в трехлитровой банке. Сначала у нас было такое распределение: (8, 0, 0), потом (3, 5, 0) а дальше (3, 2, 3). Вылив молоко из трехлитровой банки обратно в бидон, получим распределение молока: (6, 2,

0). Теперь перельем молоко из большей банки в меньшую и получим распределение (6, 0, 2). Снова наполним пятилитровую банку и получим распределение (1, 5, 2). До окончания процедуры остался всего один шаг: дольем молоко из большой банки в маленькую. В маленькой окажется 3 литра, а в большой — 4 литра молока, что и требовалось.

Вторая возможность тоже приводит к цели. Запишем цепочку распределений молока по банкам в этом случае: (8, 0, 0) — (5, 0, 3) — (5, 3, 0) — (2, 3, 3) — (2, 5, 1) — (7, 0, 1) — (7, 1, 0) — (4, 1, 3) — (4, 4, 0).

Некоторые читатели фыркнут: «Я бы на глазок отлил точно!» Для них припасена более свежая задача на переливание. Имеется банка молока и три сосуда разной формы, принадлежащие трем сварливым чудакам. Требуется так разлить все это молоко по сосудам, чтобы каждый был уверен, что у него не меньше трети всего молока.

Заметим, что эта задача совсем другого типа, чем предыдущая. Здесь все переливания выполняются на глазок, но не требуется налить поровну во все сосуды, а требуется учесть мнения чудаков. Поэтому в такой процедуре должны будут участвовать сами чудаки.

Если бы требовалось разделить молоко только между двумя чудаками, то это можно

было бы сделать очень просто: пусть первый разольет молоко по двум сосудам так, чтобы, по его мнению, в них было молока поровну, а потом попросить второго чудака выбрать себе тот сосуд, в котором, по его мнению, молока не меньше, чем в другом. В результате он и первый чудак будут уверены, что получили не меньше половины всего молока.

Решение задачи для трех чудаков таково. Сначала попросим одного из чудаков разлить молоко по сосудам так, чтобы там, по его мнению, было поровну молока. Этим мы обеспечим возможность удовлетворить этого чудака, дав ему любой из этих трех сосудов.

Теперь мы попросим второго и третьего чудаков указать тот сосуд, в котором, по их мнению, находится наибольшее количество молока. Если они укажут на разные сосуды, то следует вручить им указанные ими сосуды, а оставшийся сосуд отдать первому чудаку. В этом случае все трое уверены, что у них молока не меньше трети всего количества.

Ну, а если второй и третий чудаки укажут на один и тот же сосуд? В этом случае предложим второму чудаку отлить из него в один из остальных двух сосудов молоко так, чтобы там осталось, по его мнению, ровно треть всего молока и спросим третьего: «Там осталось больше трети молока?» Если он скажет «Нет», то отдаем этот сосуд второму чудаку. Теперь, по мнению первого, в каж-

дом из оставшихся сосудов не меньше трети молока, а по мнению третьего, вместе там не меньше двух третьей. Предложим третьему чудаку выбрать сосуд, содержащий наибольшее количество молока, а оставшийся отдадим первому чудаку. Теперь все трое уверены, что получили не меньше трети всего молока.

Если же третий скажет «Да», то нужно отдать ему этот сосуд и дать возможность второму выбрать себе сосуд из оставшихся двух других, в которых вместе, по его мнению, ровно две трети всего молока. Оставшийся сосуд отдадим первому чудаку, который также будет уверен, что получил не меньше трети всего молока. Задача полностью решена.

ИГРА В «15»

Эту игру более ста лет назад изобрел знаменитый англичанин Сэм Лойд, большой знаток головоломок. Устроена она так: в плоской квадратной коробочке лежат 15 квадратных шашек с номерами от 1 до 15. Один квадратик свободен, что позволяет передвигать остальные по коробочке, не вынимая их. Задача игрока — расставить шашки по порядку. Игра быстро захватила современников Лойда. «Люди буквально помешались на этой головоломке. Из уст в уста переда-

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Рис. 1

вались рассказы о лавочнике, забывшем открыть свою лавку, о священнике, простоявшем под уличным фонарем долгую зимнюю ночь в надежде припомнить, как ему удалось решить задачу... Один известный редактор из Балтимора рассказывает, что как-то раз он ушел в полдень на ленч и лишь поздней ночью был обнаружен вконец отчаявшимися сотрудниками газеты сидящим за столом и гоняющим взад — вперед по тарелке маленькие кусочки пирога!» — рассказывает автор головоломки...

Повальное увлечение игрой в 15 привело к тому, что ей всерьез заинтересовались математики. Наконец, в 1879 году была опубликована математическая теория этой игры, и люди потеряли к ней интерес. Кому захочется передвигать шашки, если лишь взглянув на их расположение, вы уже знаете, что можете расставить их по порядку!

Чтобы немного разобраться, когда головоломка поддается решению, а когда нет, сыграем для начала не в 15, а в 3 (рис.2). Немного погоняв шашки по коробочке, вы

убедитесь, что из конфигурации 123 получаются лишь 231 и 312, но никогда не получится 132. Переставить местами две шашки не удается. Оказывается, здесь и «зарыта собака». В конфигурации 123 царит порядок: числа стоят «по старшинству». В конфигурации 231 порядок нарушен «дважды»: 2 больше 1 и 3 больше 1, но они стоят впереди единицы. Точно так же и в расположении 312 сразу два нарушения: 3 больше и 1, и 2, но стоит впереди них. Выходит, конфигурация шашек с четным числом нарушений порядка при передвижении по коробке не теряет четности (0 — тоже четное число)! Что же касается расположения 132, где нарушение порядка одно, подвигав шашки, вы убедитесь, что и нечетность числа нарушений сохраняется.

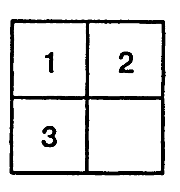


Рис. 2

Это верно не только для игры в 3, но и для игры Лойда. Если число нарушений порядка шашек четно, головоломку можно привести в требуемый вид, придется, правда, повозиться; если же оно нечетно, можно не трудиться — все равно не получится решения. Выходит, есть два принципиально различных расположения шашек (рис.3), которые нельзя перевести одно в другое, сколько ни старайся.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Рис. 3

Итак, игра в 15 потеряла свою привлекательность, как только был раскрыт ее секрет. Но вот вам еще одна похожая головоломка, придуманная В.Красноуховым совсем недавно (рис.4). Здесь не 15, а только 12 шашек, но коробочка не просто квадратная: места двух шашек заняты (заклеены), так сказать, навечно. Решить ее куда труднее, чем головоломку Лойда. Что же касается теории, то она есть: дело по-прежнему в «четности количества беспорядков»...

11	12	1
10	наклейка	2
9		3
8	наклейка	4
7	6	5

Рис. 4

МОРСКОЙ БОЙ

В морской бой вы наверняка играли. На клетчатом листе бумаги каждый из противников рисует поле 10x10 клеток. На одном он расставляет свои корабли (один линкор размером 1x4 клетки, два крейсера 1x3 клетки, три эсминца — 1x2 — и четыре катера по одной клеточке). Корабли не должны касаться друг друга ни сторонами, ни углами. По другому полю ведется стрельба: игрок называет координаты клетки (а5, к8 и т.д.), его противник сообщает о результатах: попал, утопил (если первый попал в последнюю не задетую ранее клетку данного корабля) или промазал. Стреляют до первого промаха, затем ход передается противнику. Задача — утопить корабли вражеского флота прежде, чем утонут ваши.

Разумеется, нет смысла стрелять подряд по клеткам а1, а2, а3, а4... Так можно погубить свой флот, прежде чем потопишь хоть один чужой корабль. Опытные «адмиралы» обычно сначала охотятся за линкором, стреляя примерно так, как показано на рисунке — по каждой четвертой клетке. Рано или поздно (не более чем за 24 хода) неповоротливое огромное судно попадется. Если повезет, по дороге удастся подбить и что-нибудь помельче, но настоящая охота за крейсерами начинается после потопления линкора примерно так же — стрельбой по каждой

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
а			×				×			
б				×				×		
в		×				×				×
г	×				×				×	
д			×							
е				×				×		
ж		×				×				×
з	×								×	
и			×				×			
к				×				×		

третьей клетке. Ясно, что труднее всего переловить катера — после победы над крейсерами и эсминцами все равно, как стрелять по оставшимся непроверенными клеткам. Либо попадешь, либо нет — тут не существует никакой выгодной игроку стратегии охоты...

Из этого следует несколько неожиданный на первый взгляд вывод: чтобы продержаться дольше противника, надо поставить свои корабли большого водоизмещения как можно теснее друг к другу, чтобы для катеров осталось как можно больше чистой воды. Пусть враг разбомбит ваш тяжелый флот, зато как он намучается в поисках маленьких юрких катеров!

Вооружившись этой теорией, можно смело вступать в бой с любым партнером.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ

Разгадывание шифров нашло свое воплощение в одном из видов математических головоломок — **арифметических ребусах.** В этих задачах требуется заменить буквы цифрами так, чтобы получаемое равенство оказывалось верным. При этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные. Таким образом это — дешифровка наоборот.

Рассмотрим решение одной из таких головоломок.

КНИГА + КНИГА + КНИГА = НАУКА.

Сначала обратим внимание на букву А. Из условия следует, что цифра, скрывающаяся под буквой А, вновь оканчивается на А, если ее утроить. Таким свойством обладают лишь две цифры: 0 и 5.

Теперь обратимся к букве Н. Из рассмотрения первой цифры суммы заключаем, что Н больше трех, значит, нам следует перебрать шесть значений для Н от 3 до 9. При этом обратим внимание на сложение в четвертом разряде. Сумма трех Н и, может быть, еше одной или двух единиц, переходящих из предыдущего разряда, должна равняться либо нулю, либо пяти.

Если Н = 3, то А = 0 и единица переходит в пятый разряд, и мы получаем в пятом разряде суммы число, большее трех.

Если Н = 4, то 3Н = 12, и даже добавляя

одну или две единички, мы не получим в четвертом разряде суммы ни 0, ни 5.

Если Н = 5, то А не равняется 5, а равняется 0, а в этом случае мы не сможем получить в четвертом разряде суммы 0.

Если Н = 6, то А = 0, в пятый разряд переходит 2, поэтому 2 + 3К = 6, что невозможно при целом К.

Если Н = 7, то 3Н = 21, и вновь мы не сможем получить в четвертом разряде суммы ни 0, ни 5.

Если Н = 8, то 3Н = 24, значит должна прийти единичка из третьего разряда, и А = 5, а из рассмотрения пятого разряда получаем, что 2 + 3К = 8. Значит, К = 2. Рассмотрим второй разряд. Число 3Г + 1 оканчивается на 2. Это может быть только при Г = 7. Осталось найти значения для букв И и У из оставшихся возможных значений, причем 3И + 2 больше девяти, но меньше двадцати и оканчивается на цифру, означающую У. Здесь оказывается только одна возможность: И = 3, У = 1. Искомое выражение запишется как 28375 + 28375 + 28375 = 85125.

Если Н = 9, то вновь невозможно получить в четвертом разряде суммы 0 или 5. Значит, полученное решение единственно.

Для ребуса $Я^С$ = СЕМЬЯ подход к решению совсем другой. Посмотрим, какое наименьшее значение для С возможно. Чтобы получилось пятизначное число при наимень-

шем С, число Я должно быть наибольшим, т.е. Я = 9. Но чтобы получить пятизначное число, 9 нужно возвести в пятую степень; получаем 59049. Казалось бы, мы уже получили то, что нужно, поскольку это число начинается с той же цифры, что и степень числа 9. Однако, в первом и четвертом разрядах этого числа стоят одинаковые цифры, а в слове СЕМЬЯ на этих местах стоят разные буквы. Значит, этот вариант не проходит, и нужно продолжать перебор вариантов. Кстати, такой перебор нужно было делать и в том случае, если бы мы получили верное решение, потому что решить задачу, значит — найти все ее решения.

Теперь испробуем в качестве Я число 8, при этом перебор по С можно начинать с числа 5. Число $8^5 = 32678$, а шестая степень восьмерки уже шестизначное число. Пусть Я = 7, тогда его следует возводить в степени, начиная с шестой. $7^6 = 117649$ — уже шестизначное число, а $7^5 = 16807$. Пусть Я = 6, тогда С не равняется 6 и нужно испробывать $6^7 = 279936$. Попытка оказалась неудачной. Возьмем Я = 5. $5^6 = 15625$, а $5^7 = 78125$. Эта попытка оказалась удачной. Следующие степени числа 5 очевидно не годятся. Возьмем Я = 4. $4^7 = 16384$, $4^8 = 65536$ и получаем, что в этом случае нет решений. Для Я = 3 мы имеем $3^9 = 19683$. Теперь уже очевидно, что найденное нами решение $5^7 = 78125$ является единственным.

Если вам понравился этот тип головоломок, то попробуйте решить сами несколько таких задач.

НАТАША + ТОНЯ = СЕСТРЫ,
ВАГОН + ВАГОН = СОСТАВ,
ТАМТАМ + МРАК = КОШМАР,
СССР = $Р^{Ф}$,
ОДИН + ОДИН = МНОГО,
$ГОЛ^{2}$ = ФУТБОЛ.



КУБИК РУБИКА

Эта красивая игрушка в конце 70-х годов нашего века вызвала всеобщий ажиотаж. И она заслуживала этого. Действительно, привести кубик Рубика в исходное состояние после того, как его «запутали», для очень многих обладателей этой игрушки было непосильным делом. Изобрел этот кубик в 1975 году преподаватель архитектуры из Будапешта Эрне Рубик, который хотел с его по-

мощью развивать пространственное мышление у своих студентов.

Трудность сборки кубика объясняется не только огромным количеством различных положений, в которых он может находиться (их количество равно 43 252 003 274 489 865 000), но и тем, что при осуществлении очередного продвижения приходится временно разрушать уже установленную правильную структуру. Некоторые предприимчивые изготовители кубика прикладывали в комплект к нему еще пластмассовый топорик, чтобы вконец раздасадованный владелец мог отвести душу, разломав игрушку после долгих и безрезультатных попыток собрать головоломку.

В настоящее время о кубике известно почти все. Известно, что из любого положения его можно привести в исходное за 23 поворота, имеется компьютерная программа, которая переводит кубик из любого положения в исходное за 21 поворот. При этом используются различные комбинации поворотов, дающие те или иные промежуточные результаты.

Мы предлагаем вам алгоритм сборки, в котором участвует лишь одна такая комбинация. Сначала договоримся об обозначениях. Поставим кубик углом к себе (рис.1). Вращение верхней грани кубика по часовой стрелке будем обозначать буквой В, а против часовой стрелки — буквой V. Вращение ле-

вой грани по часовой стрелке будем обозначать буквой Л, а против — буквой L. Вращение правой грани аналогично будем обозначать буквами П и Р. Рассмотрим следующую комбинацию поворотов Ф = ПВЛVLPЛ, т.е. сначала поворачиваем по часовой стрелке правую грань, потом снова по часовой стрелке верхнюю и т.д. Рассмотрим также обратную комбинацию, т.е. такую, которая возвращает кубик в исходное положение после комбинации Ф. Это, как нетрудно понять, будет комбинация F = LПЛВLVP. На рис. 2 показано действие операции Ф: все кубики на ребрах, кроме трех, переходят в прежние положения, передний кубик на ребре поворачивается, а два других кубика на левой грани меняются места-

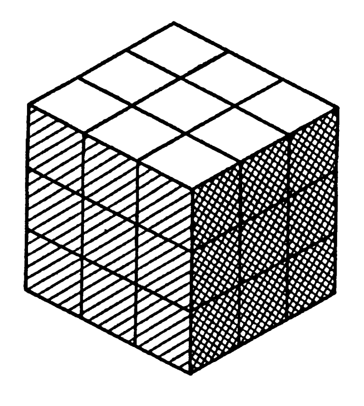


Рис. 1

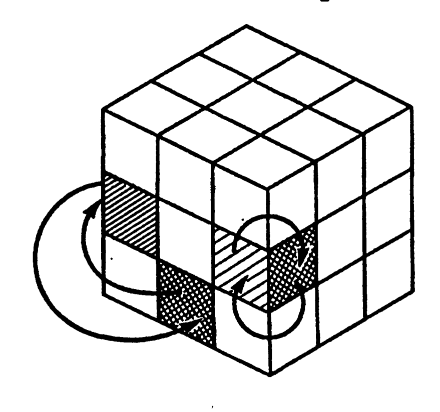


Рис. 2

ми. Если операцию Ф проделать два раза подряд, то все кубики на ребрах останутся на своих местах, лишь те два кубика, которые при комбинации Ф менялись местами, повернутся.

Этих операций достаточно для того, чтобы из любого начального положения правильно расставить кубики на ребрах куба.

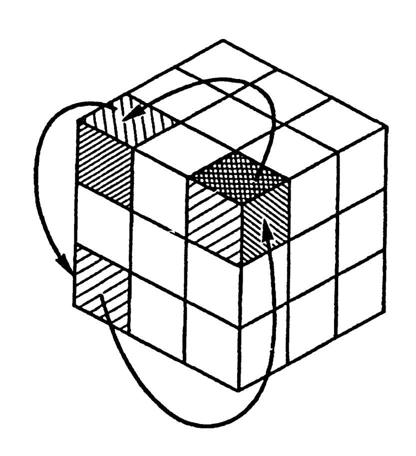


Рис. 3

Осталось расставить угловые кубики и правильно развернуть их. Для этого применим операцию ЛVLB. Ее действие показано на рис. 3. Все кубики, кроме трех, остаются на своих местах, а эти три кубика на левой грани циклически меняются местами. Таким образом можно расставить угловые

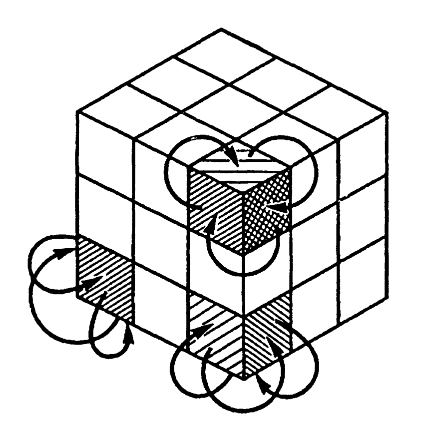
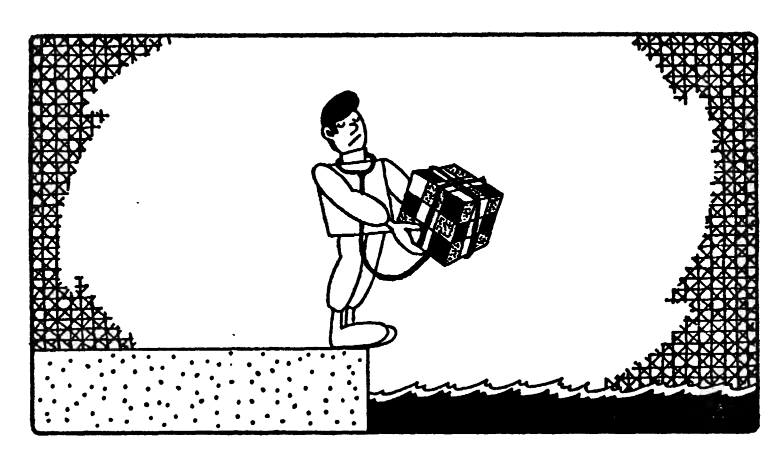


Рис. 4

кубики по своим местам, правда, они могут быть неправильно повернуты. Для выполнения этой последней стадии работы вновь воспользуемся комбинацией Ф. Если ее повторить четыре раза подряд, то три кубика на левой грани повернутся на своих местах по часовой стрелке, как это показано на рис. 4. Применяя эту операцию, мы, хотя и за большое число ходов, развернем угловые кубики. Сборка закончена.

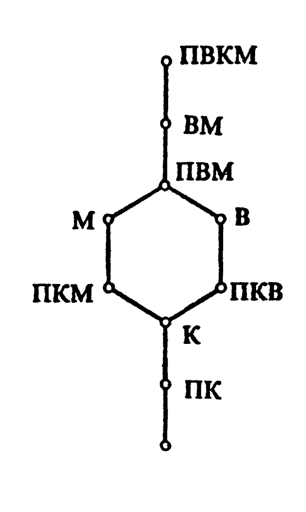


ВОЛК, КОЗА И КАПУСТА

Помимо пословиц, поговорок, былин и сказок народная память хранит множество головоломок, передаваемых из поколения в поколение. Трудность большинства из них состоит в том, что из многих возможностей нужно шаг за шагом выбирать те, которые идут к цели.

Вот одна из них — старая задача о перевозчике, волке, козе и капусте. Перевозчику нужно переправить через реку волка, козу и капусту. У него есть лодка, но она очень мала и может вместить кроме перевозчика еще что-нибудь одно: или волка, или козу, или капусту. Как же перевезти их через реку? Волка нельзя оставить вместе с козой — задерет, а козу нельзя оставить с капустой — съест. Поэтому в первый рейс через реку должна отправиться коза, а на первом берегу остаются волк и капуста. Возвращаться обратно вместе с козой перевозчику нет резона — это возвращение в начальное положение. Значит, козу следует оставить на втором берегу, где мирно дожидаются волк и капуста.

Кого из них перевозить теперь? В этом месте многие из тех, кто решил задачу, останавливались, на личных решениях этой головоломки. Каждый из путей, перед которыми мы остановились, ведет к цели.



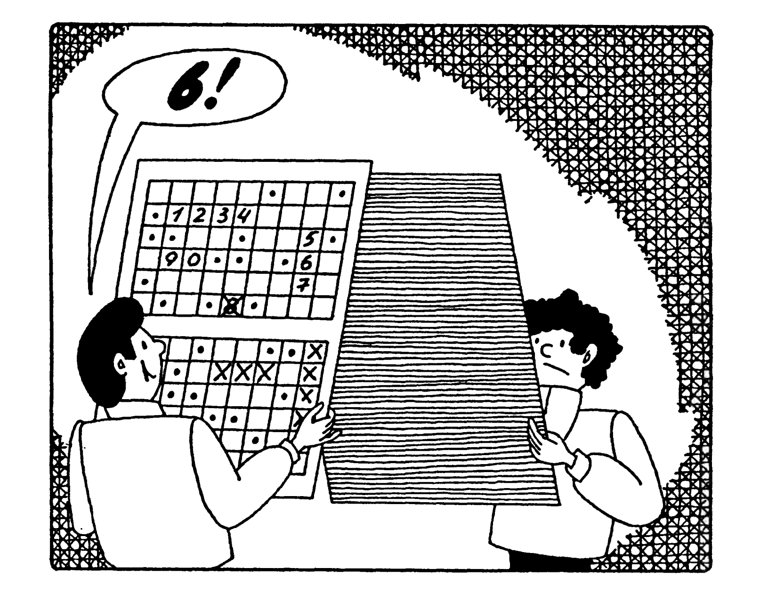
Решение этой головоломки можно представить в виде графа (рис.1), каждая из вершин которого представляет

набор действующих лиц, находящихся на первом берегу. Буква *П* означает перевозчика, *В* — волка, *К* — козу, а *М* — мешок с капустой.

БЫКИ И КОРОВЫ

Эта игра — очень интересная и очень математическая. Играют двое. Каждый из них задумывает четырехзначное число. Обычно договариваются о том, чтобы все цифры в задуманных числах были разными. Задача — вычислить, что задумал противник. Ходят по очереди. Ход состоит в том, чтобы назвать какое-нибудь четырехзначное число, а противник обязан сообщить, сколько цифр совпало и какие из них оказались на нужных местах. Для краткости цифры, которые совпали с цифрами задуманного числа и стоят на нужных местах, называют быками, а те цифры, которые совпали, но стоят не на своих местах, называют коровами. Тот, кто первым вычислил число, задуманное противником, выиграл.

Давайте разберемся, как нужно играть, чтобы не делать лишних ходов. Цифр всего десять. Значит, за два хода можно определить, как они распределены в группах цифр 1234, 5678, 90. Самый худший для вычисления вариант — когда две нужные цифры находятся среди цифр одной из проверенных



нами четверок, одна — в другой четверке и одна — в паре 90. Добавляя к паре 90, где заведомо есть одна корова, любую пару из той четверки, где есть одна корова (пусть для определенности это четверка 5678), можно на третьем ходу определить пару цифр, которых нет в задуманном противником числе (подумайте, как это сделать). Зная две цифры, которых у противника нет, можно разбить ту четверку, где есть две коровы (в нашем случае — 1234) на пары, в самом худшем случае — пары, в каждой из которых есть по одной корове. Это четвертый ход. Еще четыре хода нужно, чтобы заведомо выяснить, какие цифры задумал противник (если вы поразмыслите немного, вы поймете,

как это делается). Итак, за восемь ходов можно заведомо узнать все цифры числа, задуманного противником. Если при каждой проверке следить, чтобы проверяемые цифры не стояли на одном и том же месте в называемом на данном ходу числе, можно сократить вычисления до семи ходов (помогут быки!).

Но на самом деле бывает, во-первых, везение (если, например, на одном из ходов вы случайно назвали число, в котором нет ни быков, ни коров), во-вторых, немалую роль играют чисто психологические факторы. Маловероятно, чтобы ваш противник задумал число, состоящее только из нечетных цифр, или из цифр, идущих подряд, — каждый стремится задумать число «потруднее». Так что если на каком-то ходе у вас есть выбор, скажем, из чисел 7819, 3819 и 1798, скорее всего, задумано число 3819 — оно «более сложное».

Существует и более трудная игра, аналогичная «быкам и коровам», в которой игроки задумывают слова, и каждым ходом называют тоже слова, узнавая, сколько букв совпало и сколько из них попало на место. В нее играть придется куда дольше — ведь букв 33, а не 10, как цифр, к тому же трудно придумывать для каждого нового хода слова с неповторяющимися буквами, значит, проверка вариантов затянется. Зато эта игра не закончится всего за семь ходов, в

нее можно играть часами, — например, в поезде, когда нечем себя занять...

ОБ ОДНОМ ПАСЬЯНСЕ

Раскладывание пасьянсов — дело, требующее не только времени, но и смекалки, анализа расположения карт, поисков наилучшего хода в складывающейся ситуации. Это занятие долгое время было одним из способов отдыха, сочетающегося с размышлениями, при отсутствии партнеров для других игр. Пасьянсов было придумано великое множество. Среди них были очень сложные пасьянсы, где перед каждым ходом нужно было перебрать множество вариантов очередного хода, чтобы из них выбрать лучший. А были и совсем простые пасьянсы, требующие лишь внимательности. Эти простые пасьянсы послужили основой для нескольких математических задач.

Пасьянс, о котором пойдет речь, очень прост. Карты раскладываются одна за другой в цепочку из закрытой колоды. Если в процессе раскладывания оказывается две карты одной масти, лежащие рядом или через одну, то первая из них выбрасывается. Если после такой операции окажется еще две карты одной масти, лежащие рядом или через одну, то вновь выбрасывается та карта, которая была выложена раньше и т.д.

Если после того, как все карты выложены, в цепочке осталось лишь четыре карты разных мастей, то пасьянс считается сошедшимся. Если же осталось больше четырех карт, то они собираются в стопку и перемешиваются специальным способом: снимается верхняя карта, на нее кладется следующая, снизу в эту стопку кладется карта, оказавшаяся теперь вверху в первой стопке, а следующая за ней кладется сверху новой стопки. Так, одна за другой, карты из первой стопки перейдут во вторую: сверху—снизу—сверху—снизу—... .

После этого карты из этой стопки вновь раскладываются по прежним правилам. Если в этот раз останется лишь четыре карты в цепочке, то пасьянс сошелся, а если нет, то еще раз перемешивают карты по описанным правилам и вновь раскладывают. Если теперь осталось лишь четыре карты, то пасьянс сошелся, а если больше, то одни игроки считают его несошедшимся, а другие продолжают перемешивать и раскладывать карты до тех пор, пока либо после очередной раскладки останется лишь четыре карты, либо они убедятся, что при данном раскладе карт этот пасьянс никогда не закончится.

Этот пасьянс действительно прост. Единственное, что требуется от игрока — внимательность при раскладывании, чтобы не пропустить возможности в очередной раз выбросить карту из цепочки.

А теперь приступим к обещанной математической задаче. Предположим, что вы начали раскладывать этот пасьянс и в цепочке оказалось, скажем, половина карт колоды. Требуется доказать, что используя остальные карты, их можно так подкладывать дальше, что в конце концов в цепочке останется лишь четыре карты разных мастей.

Если вы попробуете поэкспериментировать, то у вас сначала количество карт в цепочке будет оставаться прежним или близким к прежнему количеству. Нужно найти способ, с помощью которого для любого расположения карт в цепочке удастся, подкладывая специальным образом карты, получить более короткую цепочку. В таком случае мы можем дальше уменьшить и эту цепочку, потом следующую и т.д. пока в ней не останется лишь четыре карты. Получить меньше четырех карт очевидно невозможно, если в цепочке были карты всех четырех мастей, потому что новая карта имеет ту же масть, что и выброшенная. Значит, если в цепочке уже была карта некоторой масти, то карта такой масти обязательно будет и дальше присутствовать в цепочке.

Но как уменьшить количество карт в цепочке? Рассмотрим четыре последние карты в цепочке. Если среди них есть две карты одинаковой масти, то укоротить цепочку просто. Действительно, если эти две карты лежат рядом или через одну, то мы сразу

можем выбросить одну из них в соответствии с правилами. Если же между ними находятся две карты, то, положив одну карту, а именно, карту, масть которой совпадает с мастью предпоследней карты, мы последовательно выбрасываем предпоследнюю, а затем и четвертую карты. Тем самым уменьшим на единицу число карт в цепочке (положили одну, а выбросили две).

Если же четыре последние карты имеют все разные масти, то убрать четвертую карту оказывается невозможно. В этом нетрудно убедиться, если вспомнить, что нельзя уменьшить количество карт, если имеется лишь четыре карты разных мастей. Что же делать?

Попытаемся убрать пятую карту. Среди четырех последних карт карта той же масти, что и пятая карта, может быть четвертой, третьей, второй или первой с конца. В случаях, когда она четвертая или третья, пятая карта убирается сразу же по правилам пасьянса.

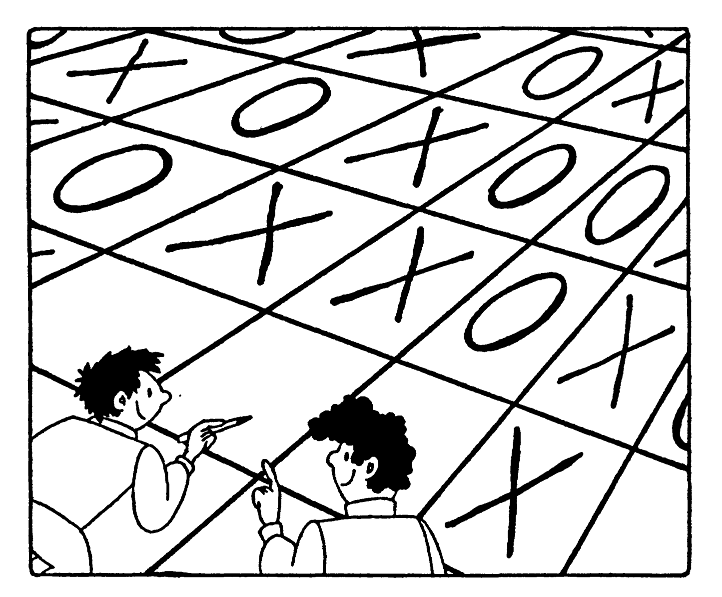
Если она предпоследняя, то положив две карты — сначала карту той масти, которую имеет третья от конца карта, а потом той масти, которую имела последняя карта, мы сможем убрать три карты: сначала ту, которая была последней, потом те, которые были третьей и пятой с конца картами.

Остался случай, когда пятая с конца карта имеет ту же масть, что и последняя карта.

Но здесь мы можем, положив карту той масти, которую имеет предпоследняя карта, убрать эту карту, а ее место займет карта, бывшая последней. Число карт не увеличилось, а расположение карт теперь соответствует предыдущему случаю, с которым мы уже умеем расправляться.

КРЕСТИКИ-НОЛИКИ

Все знают эту игру: на маленьком поле — 3х3 — двое игроков по очереди ставят свои значки, один — крестики, другой — нолики. Тот, кто первым построит ряд из трех



значков по горизонтали, вертикали или диагонали, выиграл.

Эта игра быстро надоедает, поскольку вскоре игроки начинают понимать, как свести партию вничью. Но идея хороша, и существует множество вариаций на тему простейших **крестиков-ноликов**, куда более интересных. Даже на доске 3х3 игру можно усложнить, например, разрешив каждому из игроков ставить любой значок, крестик или нолик. Правда, в такой игре побеждает (т.е. собирает ряд из трех каких-нибудь одинаковых значков) тот, кто ходит первым. Как только игроки найдут выигрышную стратегию, игра теряет свою прелесть. Можно играть в своеобразную помесь крестиков-ноликов и шашек: каждый из игроков по очереди выставляет три своих значка на поле, а затем разрешается каждым ходом передвигать их на одну клетку по вертикали или горизонтали, безразлично, в какую сторону. Цель та же — построить три знака в ряд. К сожалению, и тут есть выигрышная стратегия для того, кто делает первый ход. Существуют варианты крестиков-ноликов и их помесей с шашками для досок 4х4, 5х5, 6х6... Для досок размерами более чем 9х9 доказано, что при правильной игре нолики всегда могут свести партию вничью.

Но самые интересные — крестики-нолики на бесконечном поле. Разумеется, поле — это обычный тетрадный листок в клетку, но

его вполне хватает. Здесь нужно выстроить в ряд (по вертикали, горизонтали или диагонали) пять своих значков. Правда, и в этой игре крестики, ходящие первыми, имеют преимущество, но оно не так очевидно, как в играх на маленьких полях.

Эта игра родилась задолго до появления клетчатой бумаги. Она чрезвычайно популярна в Японии, где вместо крестиков и ноликов на поле 15x15 выставляют черные и белые шашки; японское название этой игры — рэндзю — стало теперь международным, ибо во всем мире появились ее поклонники. Поскольку трудно было смириться с преимуществом, которое дает черным первый ход, появились несколько вариантов ограничений, уравнивающих шансы игроков (например, в одном из них черные имеют право делать свой второй ход лишь за пределы квадрата 2x2 вокруг центра доски). После введения таких поправок к правилам игры она становится не менее увлекательной, чем шашки.

ДЗЯНЬШИДЗЫ

Эта игра пришла к нам из Китая. Для нее не нужно доски, фигур или других приспособлений. Достаточно набрать немного камешков и разложить их в две кучки. Теперь двое играющих по очереди берут ка-

мешки из этих кучек. Разрешается взять за один ход любое количество камешков из одной кучки или из двух кучек, но поровну. Выигрывает тот, кто своим ходом забирает все оставшиеся камни.

Несмотря на простоту условий этой игры, указать, кто выигрывает при конкретном наборе камешков и найти выигрывающую стратегию в этой игре довольно сложно. Но попытаемся это сделать.

Если в одной из кучек вообще нет камней, то очевидно выигрывает начинающий — он забирает всю вторую кучу камней. То же самое происходит, если в кучах одинаковое количество камней.

Результаты анализа ситуаций в игре мы будем заносить в таблицу. Набору камешков, скажем, 6 в первой кучке и 8 во второй в таблице соответствует клетка, стоящая на пересечении строки с цифрой 6 и столбца с цифрой 8. Если при некотором наборе камешков выигрывает тот, кто должен ходить, то мы ставим в этой клетке плюс, а если его партнер, то — минус.

Каждую клетку будем обозначать соответствующей парой чисел. Например, упомянутую клетку будем обозначать (8, 6). В клетке (0, 0), очевидно, следует поставить минус, а в клетках (k, 0), (0, k) и (k, k) для всех k, больших нуля, следует поставить плюс. Таблица начала заполняться (рис.1).

Рассмотрим клетки (1, 2) и (2, 1). Любой

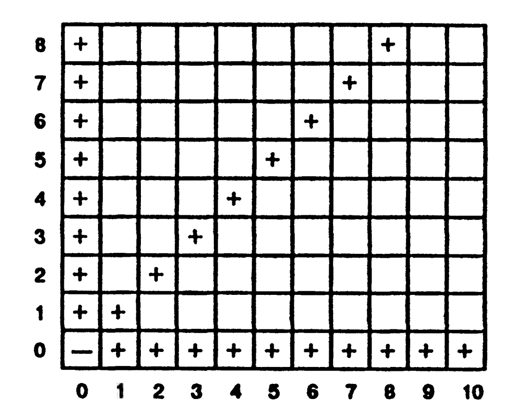


Рис. 1

ход из этих наборов ведет в клетку, уже помеченную знаком плюс, поэтому в этих клетках следует поставить минус, а знаком плюс нужно пометить все клетки, из которых за один ход можно попасть в клетку (1, 2) или (2, 1) (рис.2).

Теперь выясняется, что любой ход из кле-

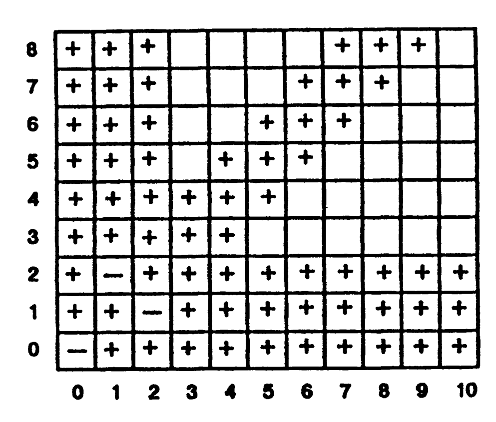


Рис. 2

8	+	+	+	+		+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+		+	+	+	+	+	
6	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
5	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+	+			
3	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+
2	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+
0	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Рис. 3

ток (3, 5) и (5, 3) ведет в клетку, уже помеченную знаком плюс, а это значит, что и эти две клетки следует пометить знаками минус, а те клетки, из которых за один ход можно попасть в них, следует пометить знаком плюс (рис.3).

Глядя на полученный рисунок, отмечаем, что знаком минус следует пометить клетки (4, 7) и (7, 4). Продолжая этот процесс, получаем, что минусом следует пометить клетки (6, 10) и (10, 6). Дальше получаем минусовые клетки (8, 13) и (13, 8), потом (9, 15) и (15, 9), (11, 18) и (18, 11). Можно продолжать этот процесс дальше и дальше, но попробуем понять, какому закону подчиняются эти пары чисел.

Будем рассматривать только те пары чисел, у которых первое число меньше второго, потому что остальные получаются изменением порядка чисел в паре. Нетрудно заме-

тить, что разность между вторым и первым числом в паре на каждом шаге увеличивалась на единицу. Кроме того, первое число пары всегда является наименьшим целым числом, не попавшим еще ни в одну из пар.

Этих данных достаточно, чтобы теперь можно было выписывать пары, не заполняя таблицы. Конечно же, высказанные утверждения нужно строго доказать, что математиками уже было сделано, но попробуйте это сделать и сами.

Итак, получаем последовательность пар чисел: (0, 0), (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), (8, 13), (9, 15), (11, 18), (12, 20), (14, 23), (16, 26),... . Закономерность никак не просматривается, и никаких идей не приходит в голову. Оказывается, что распределение чисел в парах связано с **числами Фибоначчи**, о которых в этой книге помещен специальный рассказ. Это числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,..., каждое из которых равно сумме двух предыдущих.

Мы знаем о десятичной и двоичной системах счисления, можем себе представить систему счисления с любым другим основанием, а теперь давайте познакомимся с фибоначчиевой системой счисления. Всякое натуральное число n можно представить в виде суммы чисел Фибоначчи. Сначала возьмем наибольшее число Фибоначчи, не превосходящее n и вычтем его из n. Потом возьмем наибольшее число Фибоначчи, не превосхо-

дящее этой разности и вычтем его из этой разности, потом повторим такую процедуру с новой разностью и т.д. Например, 17 = = 13 + 3 + 1.

Теперь запишем представление числа в системе счисления Фибоначчи. Для числа 17 это будет выглядеть следующим образом. Смотрим, есть ли среди слагаемых число 1? Да. Ставим последней на последнем месте цифру 1. Смотрим, есть ли среди слагаемых число 2? Нет. В этом случае ставим второй цифрой 0. Дальше проверяем наличие в сумме чисел 3, 5, 8, 13 и ставим на очередное место либо 0, либо 1, в зависимости от того, есть такое число в сумме или нет. Для числа 17 получаем запись 100101. Обратим внимание на то, что в фибоначчиевой записи числа не может быть двух единиц подряд.

А теперь запишем найденные пары чисел в фибоначчиевой системе счисления. Получим (1, 10), (100, 1000), (101, 1010), (1001, 10010), (10000, 100000), (10001, 100010)... . Теперь закон уже виден: числа, стоящие первыми, имеют в фибоначчиевой системе счисления на конце четное число нулей (в частности нуль нулей), а второе число получается из первого приписыванием одного нуля.

Вот так простенькая с виду игра привела нас к сложной системе счисления.

ШИФРЫ

Представьте себе, что в руки противника попадает план проведения военной операции. Ясно, что в таком случае нельзя рассчитывать на ее успех — противник примет все возможные контрмеры. Поэтому такие сообщения шифруются, т.е. записываются специальным способом, который известен адресату, но неизвестен остальным. Шифры бывают самые разные. Попробуйте, например, расшифровать следующее стихотворение.

Мяжя Дяма хлёнгё бряцэд,
Юлёмыря ф лэщгю нацыг.
Дыжэ Дямэцгя мэ бряцъ,
Мэ юдёмэд ф лэщгэ нац.

Это стихотворение легко расшифровать, если просто прочесть его вслух: «Наша Таня громко плачет, уронила в речку мячик...» и так далее. Здесь поменяли звонкие согласные на глухие и наоборот, а гласные поменяли на им созвучные: а на я, о на ё, и на ы, е на э, у на ю, твердый знак заменяет мягкий, а р поменялось с л.

Конечно, такой шифр никто использовать не будет, поскольку его разгадка не составляет труда. А вот почти такой же шифр использовался русскими дипломатами в XV—XVI веках.Он назывался «тарабарской грамотой». То же самое стихотворение Агнии Барто на «тарабарской грамоте» будет выглядеть так:

Рава Капя чморто нсагек
Умописа ш мегту рягит.
Киве Капегта пе нсагь,
Пе укопек ш мегте ряг.

А шифр этот совсем прост: все гласные буквы остались без изменения, а согласные заменились по следующему правилу:

б в г д ж з к л м н
щ ш ч ц х ф т с р п.

Заметьте, что в верхней строчке буквы идут в алфавитном порядке, а в нижней — в обратном.

Конечно же, часто для шифровки использовали цифры. Например, можно заменить букву ее номером в алфавите и к каждому такому числу еще добавить некоторое (одно и то же) число, чтобы усложнить шифр. Можно не прибавлять числа, убрать пропуски между буквами, и для расшифровки текста понадобится значительное время. Попробуйте найти, какое слово стоит за следующей записью: 22212211121.

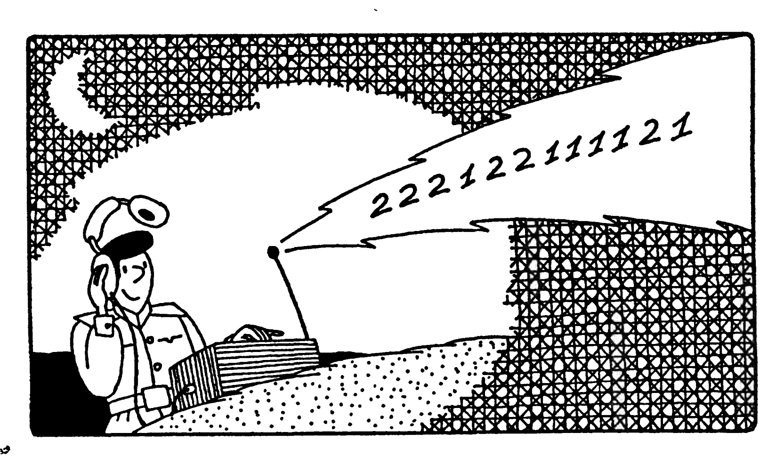


Виет Ф.

Разгадыванием шифров с давних пор занимались математики. Методы нахождения секрета шифра прекрасно описаны в рассказе Эдгара По «Золотой жук». Изве-

стно, что французский король Генрих III привлекал к расшифровке переписки его противников знаменитого Франсуа Виета, создателя алгебры, а в Англии Оливер Кромвель привлек к дешифровке сообщений монархистов одного из лучших математиков того времени профессора Оксфордского университета Валлиса. Валлис считается основоположником науки о шифровании и дешифровке — криптографии.

Наиболее надежным считается метод, использующий книги. Автор письма и его адресат имеют у себя одинаковые книги. В начале письма указывается номер страницы этой книги, а затем буквы в тексте послания заменяются номерами таких букв на этой странице. В этом случае одна и та же буква может заменяться разными цифрами. Это очень важно, поскольку в противном случае можно догадаться о буквенном значении чис-

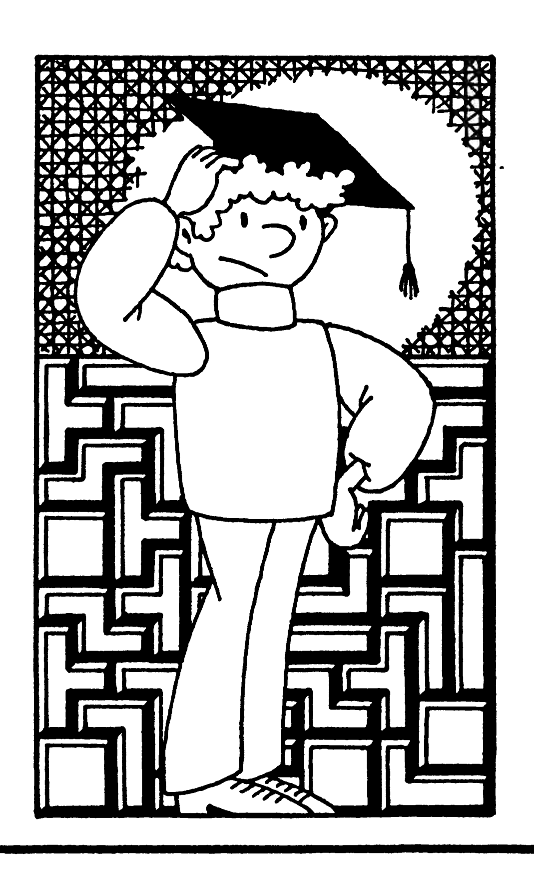


ла по частоте появления этого числа в тексте. Наибольшую частоту имеет буква О, далее идут в порядке убывания частоты буквы Е, А, И, Т, Н, С ... . Наиболее редко встречается буква Ф.

В последние десятилетия продолжали совершенствоваться шифры и методы их распознавания. Конечно же можно придумать такой сложный шифр, что противник должен будет затратить огромные усилия для его распознавания, но следует иметь в виду, что расшифровка сообщения на месте его получения не должна занимать много времени, иначе сообщение просто устареет к моменту его дешифровки.

Если вы сами еще не нашли, какое слово зашифровано числом 22212211121, то сообщаем, что это слово — фуфайка.

ПРО КОМПЬЮТЕРЫ



ИСТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

История вычислительной техники началась едва ли не раньше, чем окончательно сформировалось понятие числа. Неспроста в некоторых языках слово «цифра» происходит от слова «палец» — поначалу счет был неотделим от загибания пальцев. Пальцы и стали первой «вычислительной машиной». По мере развития счета развивалась и техника вычислений; на пальцах оказалось можно складывать, вычитать и даже умножать довольно большие числа.

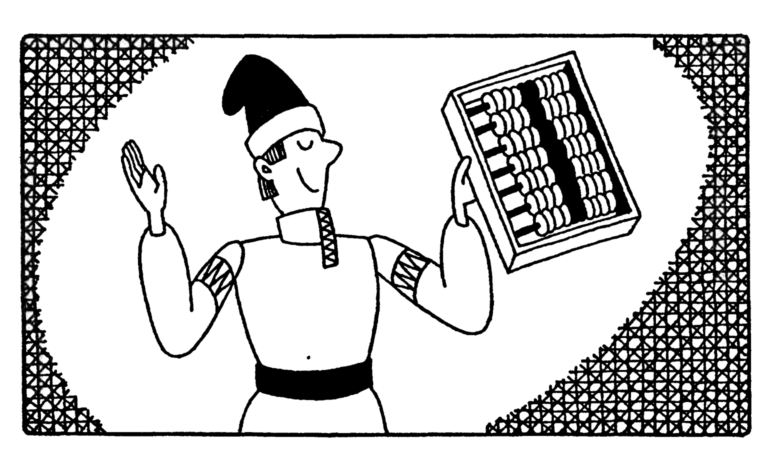
Простейший пример: вы забыли таблицу умножения на 9, а вам нужно быстро сооб-



разить, сколько будет 9·6. Нет ничего проще! Вы кладете перед собой две руки, отсчитываете слева шестой палец и загибаете его. Готово: первая цифра произведения 9·6 — слева от загнутого пальца, вторая — справа. Получился правильный ответ: 54. Но можно перемножать и другие числа, правда, сложнее.

Теперь уже эти методы никто не вспоминает, но в середине века пальцевый счет был широко распространен. А знаменитый Фибоначчи в XIII веке рекомендовал всем осваивать счет на пальцах!

Великий переворот в вычислительной технике произошел с изобретением абака. Даже если вы не слышали этого слова, вы встречали, и не раз, русскую разновидность этого прибора — счёты. В разных странах абак выглядел по-разному (доска с линиями, вдоль которых выкладывали камушки; до-



ска с желобками; доска с прутиками, на которые нанизывались костяшки; различные таблицы), но суть его устройства была одна и та же — ряды предметов, отвечающие за разные разряды числа. Интересно, что все эти «счетные машины», кроме наших счёт, были пятиричными (по пять косточек в ряду). Вычисления на абаке производились в позиционной системе счисления, даже если использовавший его народ не знал позиционной формы записи чисел. Можно спорить, появился ли везде абак раньше позиционной системы счисления, но весьма вероятно, что именно такой прибор натолкнул древних вычислителей на мысль о знаке для нуля.

Абак долгое время играл особую роль в арифметике (как в геометрии — циркуль и линейка): задача считалась решенной, только если было указано, как необходимые вычисления выполнить на абаке. Существовала целая наука о счете на этой «машине»; особенно большой вклад в ее развитие внес французский ученый Герберт (950—1003), под конец жизни ставший папой римским Сильвестром II.

Лишь после повсеместного распространения позиционной десятичной системы, в которой можно вычислять прямо на листе бумаги, без вспомогательных средств, абак утратил былое значение.

Но вычисления с развитием торговли, банковского дела, техники становились все

более трудоемкими, и мысль поручить счет машине оставалась привлекательной. Многие умы занимались этой проблемой; в XVII веке появились первые механические счетные машины. Около 1632 года немецкий ученый **Вильгельм Шиккард**, профессор математики и восточных языков в Тюбингере, сконструировал первый в истории счетный механизм. Вскоре, в 1642 году, великий французский математик, физик и философ **Блез Паскаль** (1623—1662) создал свою счетную машину. Она умела складывать и вычитать. Механизм этот был прародителем **арифмометров**, еще недавно стоявших на столах в каждом учреждении, где приходилось много считать. В них при счете вращающиеся колеса зацеплялись друг за друга так, что десяток в каком-либо разряде автоматически превращался в единицу следующего разряда.



Паскаль Б.

Настоящий арифмометр, умевший не только складывать и вычитать, но умножать и делить, сконструировал замечательный математик и философ **Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1646—1716). Список заслуг, которые имеет перед математикой

этот ученый, поистине огромен; но, как видите, и вычислительная техника была не чужда создателю дифференциального и интегрального исчисления.

Особняком стоит среди счетных машин докомпьютерной эры логарифмическая линейка. Ее придумал в 20-х годах XVII века английский математик Вильям Оутред (1754—1660). Кстати, это именно он ввел обозначение «х» для умножения. Линейка необыкновенно удобна: считать на ней можно очень быстро, места почти не занимает, ее можно всюду носить с собой в кармане. Не зря столько веков просуществовал этот вычислительный прибор: лишь недавно калькуляторы окончательно вытеснили логарифмическую линейку из инженерного обихода.

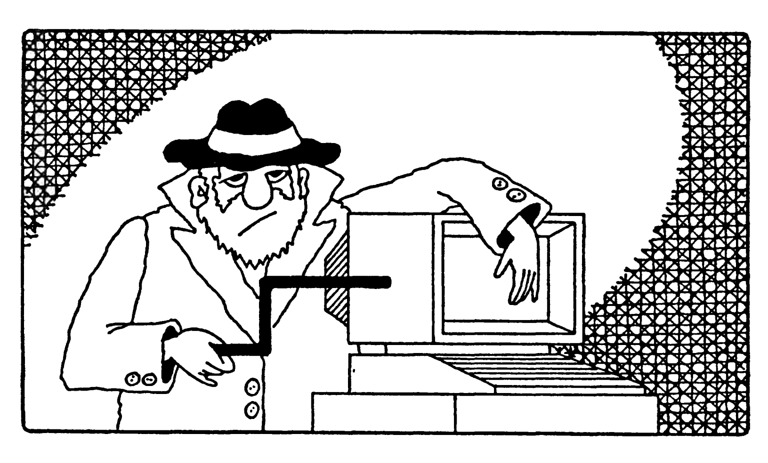
Наконец, в первой половине XIX века англичанин Чарльз Бэббидж (1791—1871) разработал конструкцию машины, по многим причинам достойной называться первым компьютером. Но эта машина так никогда и не была построена, и лишь через сто лет появились первые возможности для создания настоящих компьютеров... Но то уже совсем другая история.

А пока продолжалось развитие механических устройств для все более сложных вычислений. Так, известный советский математик и корабел А.Н.Крылов (1863—1945) изобрел машину для решения дифференци-

альных уравнений. А в 1915 году берлинская фирма «Аскания» построила вычислительную машину для расчета времени приливов и отливов на северном побережье Германии. Для составления расписания приливов и отливов на год автомату нужно было работать около восьми часов (по тем временам — удивительно быстро!). Самое замечательное то, что эта машина служила верой и правдой 60 лет — до 1975 года, когда уже вовсю трудились электронные вычислительные машины!

ПЕРВЫЙ КОМПЬЮТЕР

Первый компьютер и был, и не был. Не был — потому, что его автор Чарльз Бэббидж не мог его построить: в то время (свою работу Бэббидж начал в 1834 году) подобная



машина могла быть только механической. Но точность изготовления деталей, которая необходима для этой машины, в середине XIX века была недостижима. Кроме того, Бэббидж все время совершенствовал свое изобретение и никак не мог остановиться.

Но первый компьютер все же был — не осуществленный «в железе», но продуманный до мельчайших деталей, тщательно вычерченный. Кроме полного комплекта чертежей, выполненных автором, нам осталось подробное словесное описание замечательной машины, составленное сотрудницей Бэббиджа **Августой Адой Лавлейс**, разработанная ею теория программирования и несколько первых в истории человечества программ, написанных для этой вычислительной машины. Ибо машины Бэббиджа была способна работать по различным программам, выполняя автоматически от начала до конца все действия, необходимые для решения какой-либо инженерной или математической задачи.

Основные части первого компьютера были теми же, что и в каждой современной ЭВМ: устройство для ввода данных; запоминающее устройство, способное хранить исходные данные и промежуточные результаты (Бэббидж называл его «складом»); арифметическое устройство, выполнявшее все четыре действия арифметики («мельница»); устройство управления, руководившее перемещениями со

«склада» на «мельницу» и работой «мельницы», и обеспечивавшее выполнение нужных действий в нужном порядке по заданной программе; устройство для вывода результата. Загружалась программа при помощи комплектов карточек с пробитыми дырочками — перфокарт.

Уместно назвать удивительного предка компьютера, не имевшего никакого отношения к вычислениям. Это — ткацкий станок, изобретенный в 1804 году французским инженером Жозефом Мари Жаккаром. Станки Жаккара сами, без участия человека, ткали сложные узоры, руководствуясь последовательностями перфокарт, где кодировались предписания — какую нить и как нужно переплести с нитями основы. Таким образом, знаменитое жаккардовое полотно делалось на первых в мире станках с программным управлением!

Современный компьютер ни внешне, ни внутренне ничем не напоминает механического «динозавра» Бэббиджа. В нем нет ни колес, ни шестеренок. Но «архитектура» его та же — дисковод для ввода данных с дискеты, процессор для вычислений, программа для руководства, экран монитора и принтер — для вывода результата. А перфокарты лишь совсем недавно вышли из программистского обихода — с тех пор, как их вытеснили дискеты.

ЧАРЛЬЗ БЭББИДЖ
(1791—1871)

Изобретатель первого в истории настоящего компьютера (пусть и никогда до конца не реализованного «в железе») родился в городе Тинмуте на юго-западе Англии в семье банкира. Он был слабым ребенком и до 11 лет учился дома. С детства он интересовался математикой (предпочитая чтение математических книжек художественной литературе!), любил механические игрушки, которые затем научился делать сам. Когда в 1810 году Чарльз поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета, оказалось, что он знает математику значительно лучше сверстников. Похоже, что это сильно испортило его характер. Чем дальше, тем более склочным и неуживчивым становился этот человек.

Через некоторое время Ч.Бэббидж ушел из Тринити-колледжа, считая, что его друзья Д.Гершель и Д.Пикок достигли в математике большего, чем он. Быть же третьим он считал ниже своего достоинства. Перейдя в колледж св.Пет-



Бэббидж Ч.

ра, он окончил его в 1814 году, как и хотел, первым... Его первые математические труды были оценены современниками, его избрали членом Королевского общества, но Бэббидж немедленно поссорился с большинством «власть имущих» этой Академии наук. Неудивительно, что в 1826 году ему не досталась освободившаяся должность секретаря Королевского общества, хотя он был достоин ее более других.

Занимаясь астрономией, статистикой, точной механикой, Бэббидж постоянно сталкивался с необходимостью производить трудоемкие вычисления. Наконец ему надоело считать вручную, и в 1822 году он начал конструировать вычислительные машины. Первая машина Бэббиджа, названная им «разностной», была еще лишь очень сложным арифмометром. Постепенно совершенствуя ее, Бэббидж в конце концов сделал конструкцию своей машины столь сложной, что и в нынешнее время построить такой аппарат было бы проблематично... Не доведя эту работу до механического воплощения, Бэббидж отвлекся. У него возникла идея совсем другой машины, получившей название «аналитической». Это и был первый в мире компьютер... В 1843—1849 годах Бэббидж выпустил полный комплект чертежей этой машины, но словесного описания ее не сделал. На наше счастье, в 1840 году Бэббидж был приглашен в Италию с лекциями об

аналитической машине, которые законспектировал, а затем издал Л.Ф.Менабр. Впоследствии этот труд перевела и комментировала Ада Лавлейс, верная сотрудница Бэббиджа. Она же и написала несколько программ для аналитической машины.

В 1871 году Бэббидж умер, разочарованный в жизни и не оцененный современниками. Его замечательная машина так и осталась кипой чертежей... Нынешние специалисты же признали, что она по своему принципиальному устройству была лучше первых электронных машин двадцатого столетия!

АВГУСТА-АДА ЛАВЛЕЙС
(1815—1852)

Дочь лорда Байрона, великого английского поэта, **Августа-Ада Лавлейс** унаследовала свои математические способности вовсе не от него, а от матери, которую некогда Джордж Гордон Байрон окрестил «принцессой параллелограммов». Родители разошлись навсегда, когда ей не было и года, так что со своим знаменитым отцом она была вовсе незнакома... Двадцати лет она вышла замуж за лорда Кинга, ставшего впоследствии графом Лавлейс, и вела бы обычную жизнь английской леди (дом, семья, визиты, приемы), когда б не встреча с Чарльзом Бэббиджем.


Лавлейс А. А.

Аду чрезвычайно заинтересовала аналитическая машина, изобретенная Бэббиджем. Она перевела и прокомментировала «Замечания» Менабра о машине Бэббиджа, написала несколько программ для нее, разработала начатки теории программирования.

Лишь благодаря ей мы знаем все подробности о труде Бэббиджа, который сам не удосужился описать свое детище, ограничившись подробными чертежами.

Таким образом, Ада стала первой в истории программисткой. Не удивительно, что один из современных языков программирования носит ее имя — АДА.

Ада умерла совсем молодой — неполных тридцати семи лет (как и ее отец). Незадолго до смерти она совершила большую ошибку, в которой косвенно повинен Бэббидж — проникшись его трудами, леди Лавлейс вообразила, что теперь она знает безошибочную систему игры на скачках, и проиграла столь огромную сумму, что не решалась сказать о ней мужу. Мать выручила ее, но, вероятно, это потрясение подкосило ее и без того пошатнувшееся здоровье...

БИТЫ И БАЙТЫ

Компьютеру удобно иметь дело только с двумя состояниями — «включено» (один) и «выключено» (ноль). Один такой символ (неважно, 0 или 1) занимает, как говорят программисты, 1 бит информации. Чтобы записать число, большее 1 (т.е. 2—10, 3—11, 4—100 и так далее), бита мало. Но пяти битов уже достаточно, чтобы научить нашу машину латинскому алфавиту. В самом деле, в пяти клеточках мы уже можем расставить все возможные комбинации из двух цифр от 00000 до 11111. Поскольку 100 000 — это 32, таких комбинаций тоже 32, а в латинском алфавите только 36 букв.

Большая единица количества информации — **байт** — содержит 8 бит, т.е. 8 «клеточек» для записи нулей и единиц. Поскольку 100 000 000 — это 256, в одном байте можно записать не только все буквы и цифры, но и всевозможные знаки, какие только могут понадобиться. Тем не менее для записи чисел в машинной памяти используются ячейки еще больших размеров — из двух байтов. В такой ячейке помещается солидных размеров машинное слово.

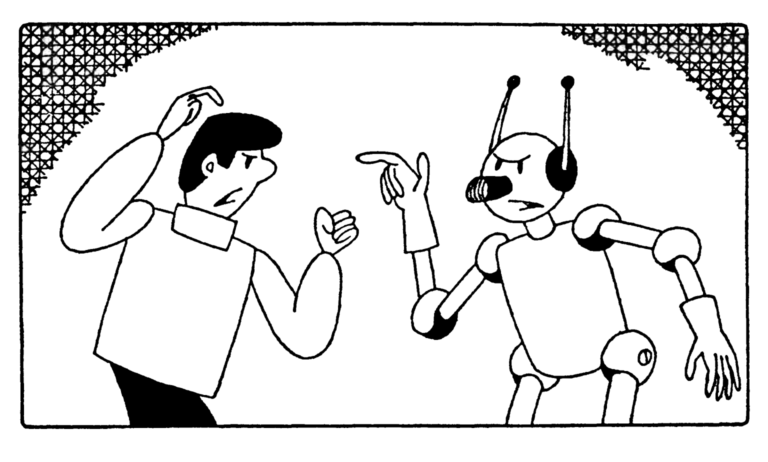
Но человеку довольно трудно объясняться двоичными словами, которыми оперирует компьютер. Чтобы облегчить общение, пришлось научить машину понимать более «человеческий» язык. Этому языку до челове-

ческого еще слишком далеко. Так возникли языки программирования, о которых речь впереди.

В памяти компьютера есть место для очень большого количества информации, тут уже не обойтись байтами и тем более битами. Так что если речь идет об объемах памяти, говорят о килобайтах, мегабайтах и даже гигабайтах. На дискету объемом в один мегабайт можно записать приличных размеров книгу. А этот небольшой текст занимает 2560 байтов — всего-навсего...

ЯЗЫКИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Итак, вычислительная машина работает только со словами из двух знаков — нулей и единиц. В одном из романов 70-х годов (В.Морозов, «Программист») есть такая история: начальство нагрянуло в вычислительный центр, когда в машинном зале чинили компьютер, (половина устройства была попросту отключена), и потребовало немедленно продемонстрировать, как машина умеет считать. Программист, к которому было обращено требование, не растерявшись, задал машине задачу прямо в двоичных кодах, умудрившись нигде не ошибиться. Довольное начальство удалилось, а программист этот прославился на весь институт: мало кто может говорить с машиной на ее родном языке!



И в самом деле, трудно не ошибиться, ведь слова длинные и не значат для нас ничего. С другой стороны, трудно научить машину обычному человеческому языку: в каждом языке есть множество тонкостей, машине недоступных. Но общаться необходимо! Что же делать? Пришлось придумать «промежуточный язык», на котором нетрудно договориться обеим сторонам. Таких языков существует довольно много, и все они разные.

Первые **языки программирования**, по сути, лишь немного упрощали общение, заменяя буквенными обозначениями команды, понятные машине: сложить, умножить, вычесть, разделить, присвоить переменной значение (т.е. считать, что в данный момент переменная равна такому-то числу), и так далее. Программы, написанные на таких языках, довольно длинны, поскольку каждое

мало-мальски сложное действие нужно «разжевать». И все же это куда удобнее, чем вручную переводить свою программу в двоичные коды. Теперь специальная программа-переводчик (транслятор) могла растолковать компьютеру, что к чему. Такие языки и теперь верно служат людям, но используются профессионалами — системными программистами — в тех случаях, когда программа должна учитывать специфику данной машины, для составления экономных и эффективных программ.

Немного позже появились **алгоритмические языки**, в которых уже нет необходимости подробно расписывать каждое действие, а можно писать целые формулы и фразы, иногда довольно громоздкие, — машина переведет их на свой язык сама. И не только переведет — она найдет ошибки и сообщит о них: ведь машина понимает только то, что сказано правильно. А поскольку человеку свойственно ошибаться, крайне редко случается, чтобы программа стала понятна с первого раза — ее приходится отлаживать, т.е. вылавливать ошибки одну за другой. Как говорят программисты, «сегодня я нашел и исправил очередную последнюю ошибку»...

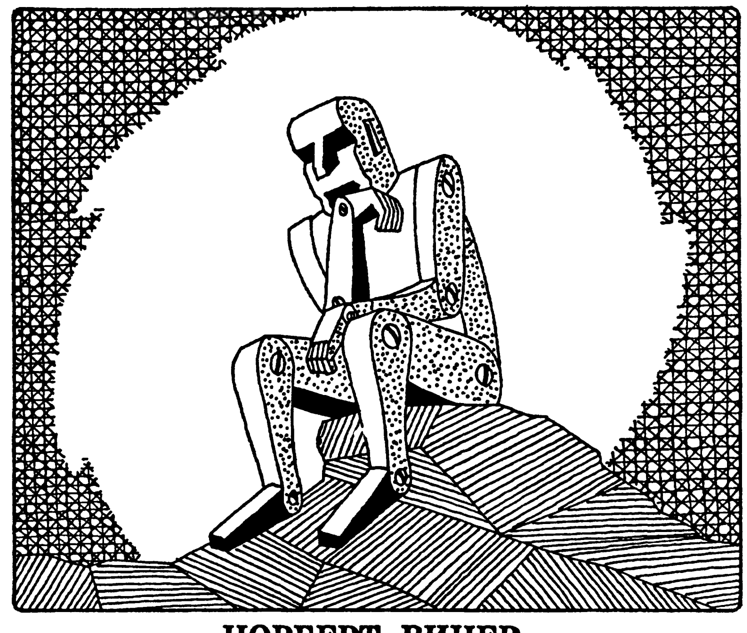
МОЖЕТ ЛИ МАШИНА МЫСЛИТЬ?

Вычислительную машину можно научить мыслить логически. Дело лишь за программами, которые будут руководить ее рассуждениями. Задав машине систему аксиом и правила доказательства теорем, можно научить ее доказывать математические гипотезы. Взяв все известные ей факты, связывающие между собой полученные данные, машина выберет те, что нужны для решения поставленной задачи, и успешно решит ее.

Такую машину можно смело назвать разумной, и вполне вероятно, что в перспективе она и вправду будет ставить перед собой вопросы и отвечать на них... Но все же такой интеллект — производный от человеческого, и круг вопросов, которые компьютер «пожелает» разрешить, зависит от того, что мы, люди, в него заложим...

Машину можно научить и выбирать из двух равных возможностей (с чем не мог справиться несчастный буриданов осел, умерший от голода на равном расстоянии от двух одинаковых охапок сена). Человек в таких случаях, например, кидает монетку. Заменой монетки для компьютера служит так называемый генератор случайных чисел, выдающий последовательность чисел, каждое из которых не зависит от предыдущего. Сложнее дело обстоит с озарением, вдохновением и фантазией. Нам не удается научить

машину работать мало-мальски творчески, поскольку мы сами плохо понимаем, почему у человека есть творческие способности, как они устроены, а поэтому — как их смоделировать на компьютере. Если когда-нибудь люди разберутся в самих себе и природе собственного нелогичного мышления, вероятно, они создадут машину, которой не будет чуждо прекрасное...



НОРБЕРТ ВИНЕР

(1894—1964)

«Воспитанные с детства в убеждении, что затянувшееся благополучие является естественным состоянием человечества, мы верили, что в результате медленной, но неиз-

бежной эволюции постепенно создадутся еще более благоприятные условия существования. Даже сейчас, сорок лет спустя, нам трудно себе представить, что та длинная цепь катастроф, через которую мы прошли, и есть нормальная человеческая жизнь».

С тех пор, как написаны эти слова, прошло еще без малого сорок лет. Их автор — Норберт Винер, один из величайших математиков.

Будущий создатель кибернетики родился и вырос в гуманитарной семье. Его отец был профессором славянских языков в Гарвардском университете. Мальчик рос довольно хилым, с детства страдал от близорукости и конфликтного характера. И вряд ли исключительные математические способности, проявившиеся очень рано, делали его детство счастливее. Он расскажет об этом впоследствии в книге «Бывший вундеркинд», которая, правда, в русском переводе так и не появилась.

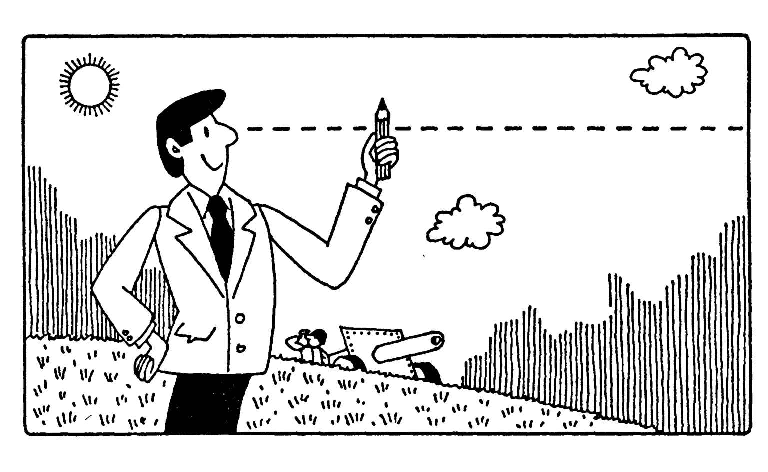
В четырнадцать лет Винер окончил колледж, в восемнадцать — получил степень доктора философии Гарвардского университета за дис-



Винер Н.

сертацию по математической логике. Затем еще два года изучал математику в Европе, у блистательных учителей — мировых светил Бертрана Рассела и Давида Гильберта.

Первая мировая война вынудила молодого ученого вернуться в Америку. Он сменил несколько мест и в конце войны стал работать на баллистическом полигоне — составлять таблицы для расчетов стрельбы. Через полгода уволился из армии с твердым убеждением, что бывшие вундеркинды для военной службы не годятся.



С 1919 года Винер преподает математику в Массачусетском технологическом институте, в то время — сугубо инженерном вузе, где математика считалась всего лишь вспомогательной дисциплиной. Сейчас это один из мировых центров математических исследований, что во многом объясняется лично-

стью Винера, проработавшего в МТИ — правда, с перерывами, — до конца жизни.

В тридцатые годы Винер принял горячее участие в обустройстве многих ученых, бежавших в Америку от фашизма. Отчасти это объяснялось национальными мотивами — мало того, что он был евреем, у него еще оказались родственники в Германии. Но главное все же было не в личном. Интернациональный демократизм ученого основывался на твердом убеждении: по-настоящему талантливых людей на Земле слишком мало, чтобы ограничивать их творчество национальными или идеологическими рамками.

Во время второй мировой войны Винеру вновь приходится заняться проблемой баллистических расчетов. Но за минувшее время объем расчетов многократно увеличился, а запас времени на их проведение сократился до нескольких секунд. Существовавшие к началу войны электромеханические и релейные счетные устройства оказались слишком медлительны. Н.Винер принял участие в разработке электронной вычислительной машины для управления береговой ПВО вместе с Дж.фон Нейманом и многими другими видными математиками.

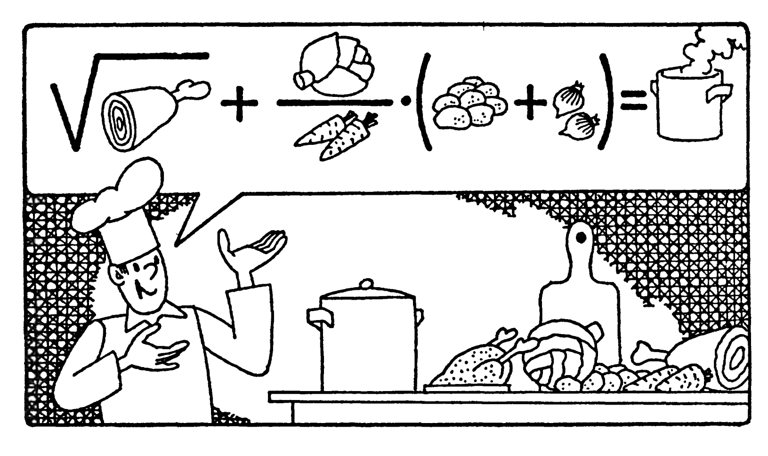
Именно Винер обратил внимание, что процессы, управляющие сложной электронной системой, во многом аналогичны тем, с которыми имеют дело нейрофизиологи, изучающие целенаправленную деятельность жи-

вых существ. У сложной системы, годной для решения разнообразных задач, нет готовых программ действия на все случаи жизни. Сохранение работоспособности таких систем достигается за счет явления, названного обратной связью. Она позволяет отслеживать и корректировать уже начатое, но еще не законченное действие. Например, когда рука берет карандаш, обратной связью служит зрение. Необходимо отметить, что в этом и других случаях коррекция происходит совершенно автоматически, без участия «главного командования».

Существование обратной связи позволяет рассматривать сложные системы различной природы — физической, биологической, социальной — с единой точки зрения. В этом и состоит основа **кибернетики**. По-гречески «кибернетис» означает — кормчий, управляющий судном. Между прочим, от того же корня происходит слово «губернатор»...

АЛГОРИТМ

Слово **алгоритм** стало широко употребляться в последнее время. Оно означает описание совокупности действий, составляющих некоторый процесс. Обычно здесь подразумевают процесс решения некоторой задачи, но и кулинарный рецепт, и инструкция по пользованию стиральной машиной, и описа-



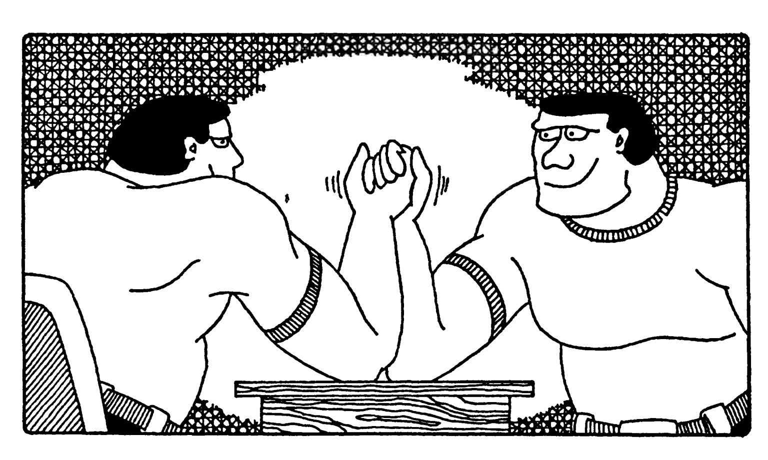
ние процедуры проявления фотопленки и еще многие и многие другие правила, не имеющие отношения к математике, являются алгоритмами.

Термин **алгоритм** произошел от имени ученого VIII—IX веков **Аль-Хорезми.** Его имя говорит, что родился он в городе Хорезме, который сейчас входит в состав Узбекистана. Большую часть своей жизни Аль-Хорезми провел при дворе багдадских халифов. С его именем связывают создание в Багдаде «Дома мудрости» — багдадского хранилища рукописей. Из математических работ Аль-Хорезми до нас дошли всего две — алгебраическая и арифметическая. Алгебраическая работа называется «Альджебр уальмукабала», что означает «Восстановление и противоположение». Восстановлением он назвал перенос отрицательных членов в другую часть уравнения, а противоположением — сокращение равных членов в разных частях

уравнения. От названия этой книги родилось слово **алгебра**.

Вторая книга, долгое время считавшаяся потерянной, была найдена в 1857 году в библиотеке Кембриджского университета (Великобритания). Точнее, был найден ее перевод на латинский язык. В этой книге даны четкие правила арифметических действий, практически те же самые, что используются сейчас. Первые ее строки были переведены так: «Сказал Алгоритми. Воздадим хвалу Богу, нашему вождю и защитнику». Так имя Аль-Хорезми перешло в Алгоритми, откуда и появилось слово алгоритм. Его ввел в обиход немецкий математик **Эрнст Шредер** (1841—1902) для обозначения вычислительных процедур механического характера.

Одним из древнейших математических алгоритмов является алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух положительных чисел. Вот его простей-



ший вид. Пусть заданы два целых числа. Если они равны, то их наибольшим делителем будет каждое из них. В этом случае процесс заканчивается на первом шаге. Если они не равны, то вычитаем из большего числа меньшее. Это шаг алгоритма. Теперь рассмотрим вычитаемое и разность. Проделаем с ними ту же самую процедуру. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока вычитаемое и разность не станут равны. Поскольку большее число в парах на каждом шаге уменьшается, но всегда не меньше единицы, то такой процесс не может продолжаться бесконечно, а закончится через несколько шагов.

Интуитивное представление об алгоритме, как о системе предписаний для действий, не могло удовлетворить математиков еще в прошлом веке, не говоря уже о нынешнем, когда информатика прочно вошла во все сферы человеческой деятельности.

В двадцатых годах нашего века задача точного определения понятия алгоритма стала одной из центральных проблем математики. Дело в том, что тогда существовало две точки зрения на математические проблемы:

1. Все проблемы разрешимы, но для некоторых алгоритм решения еще не найден, поскольку еще не развиты соответствующие разделы математики.

2. Есть проблемы, для решения которых вообще не может существовать алгоритма.

Правы оказались сторонники второй точ-

ки зрения, но для того, чтобы ее обосновать, необходимо было дать четкое определение алгоритма. Это было сделано трудами целой плеяды математиков. Любопытно, что важной вехой в этой работе было создание умозрительной машины, которая на бесконечной ленте могла лишь ставить и стирать точки и передвигать эту ленту влево и вправо, но при этом оказалось, что она может выполнять все логические операции. Ее назвали «машиной Тьюринга» по имени английского математика и инженера **Алана Тьюринга** (1912—1954), описавшего ее в 1936 году.

Точное определение алгоритма дало возможность к настоящему времени доказать алгоритмическую неразрешимость более десятка математических проблем.

Если алгоритм предназначен для выполнения на вычислительной машине, то его нужно записать на языке, понятном этой машине. Такая запись называется программой, а язык, на котором записана программа, называется **языком программирования**. Таких языков придумано довольно много: БЕЙСИК, ФОРТРАН, ПАСКАЛЬ, АДА, СИ. Каждый из них имеет свои достоинства и недостатки, а поэтому и свою область применения — статистика, экономика, физика и т.д.

А математики по сей день продолжают совершенствовать и уточнять понятие алгоритма.

ДЖОН ФОН НЕЙМАН
(1903—1957)

В некоторых играх, например, в домино или карточных играх, успех зависит не только от вашего расчета, но и от расклада фишек или карт. Этого расклада вы не знаете, но получаете с каждым ходом все больше информации о нем.

У взрослых есть и другие игры. Самая серьезная и страшная из них — война. Например, чтобы сбить ракетой сверхзвуковой бомбардировщик, нужно целиться не прямо в него, а в какую-то точку впереди по его курсу. Но при этом самолет не обязан лететь по прямой, он, хоть и в ограниченных пределах, но маневрирует. Ракетчик должен предугадать дальнейшее поведение пилота, судя по информации о том, как тот летел до момента выстрела. Пока не изобрели самонаводящиеся ракеты, исследования этой ситуации велись очень широко.

Другой неисчерпаемый источник игровых ситуаций — рыночная экономика. Коммерческий успех или фиаско



Нейман Дж.

предпринимателя связаны не только с его собственными действиями, но и с труднопредсказуемым поведением конкурентов. Математики и такую деятельность называют игрой.

Первые исследования азартных игр принадлежат Ферма и Паскалю, но как особая отрасль математической науки теория игр сформировалась в начале 40-х годов нашего века. Ее автор — американец венгерского происхождения **Джон (Янош) фон Нейман.** Сын будапештского банкира, он недолго работал в Германии, а в 1930 году эмигрировал в США. В 1944 году Нейман, совместно с экономистом О.Моргенштерном, выпустил книгу «Теория игр и экономическое поведение», которая принесла авторам мировую славу.

Вот некоторые выводы из их теории. Оказывается, что экономическая игра, в которой участвует все население страны, приводит к чрезвычайно неустойчивой, непредсказуемой ситуации. Следовательно, экономика реально существующих государств устойчива за счет того, что большинство населения не занимается предпринимательством.

Тогда же, в 40-е годы, под воздействием военных нужд активно развивалось проектирование вычислительных машин. Рассчитать за несколько секунд вероятную траекторию самолета не под силу ни одному человеку. К началу войны имелись электро-

механические и релейные счетные машины, но они тоже работали недостаточно быстро. В течение нескольких лет ученые разных научных лабораторий Америки трудились над созданием электронной вычислительной машины для управления береговой ПВО. Машина называлась ЭНИАК (перевод ее полного названия звучит так: «электронный численный интегратор и автоматический вычислитель»).

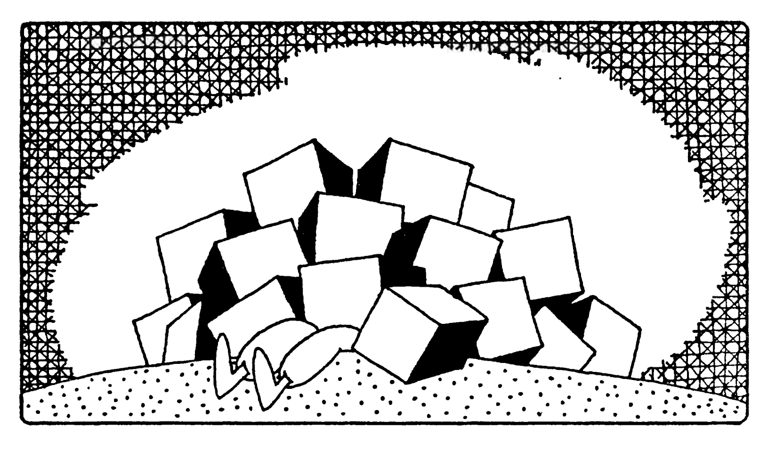
Нейман довольно поздно включился в эту работу. Он быстро понял, что ЭНИАК страдает принципиальным недостатком — в ней отсутствует устройство для запоминания и хранения команд, но менять структуру машины было уже некогда. Нейман организует разработку новой ЭВМ и в 1946 году, вместе с Г.Голдстейном и А.Берксом, публикует отчет «Предварительное обсуждение логической конструкции электронно-вычислительной машины». Работы по ЭНИАК были засекречены, и Нейману грозило обвинение в раскрытии военной тайны. Но все обошлось, поскольку гениальная голова Неймана требовалась еще и в американском атомном проекте.

В 1949 году неймановская машина ЭДВАК (перевод этого сокращения: «электронный автоматический компьютер, работающий с дискретными переменными») была построена. С нее началась эпоха компьютеров. В дальнейшем ЭВМ с последовательным вы-

полнением команд в программе называли компьютерами со структурой фон Неймана.

ТЕТРИС

Эту игру придумал московский программист **Алексей Пажитнов.** Однажды ему на глаза попалась древняя головоломка «Пентамино», в которой требуется из данного набора плоских деталек, представляющих собой всевозможные конфигурации из пяти одинаковых квадратиков, сложить различные фигуры. Эта головоломка, рассчитанная на неспешное вдумчивое решение, превратилась в весьма динамичную компьютерную игру «на скорость соображения».



В игре Пажитнова в плоский «стакан» по одной падают фигурки (всевозможные конструкции из четырех квадратиков; кста-

ти, отсюда и название «Тетрис» — от слова «тетра» — «четыре» по-гречески). Игрок может поворачивать летящую фигурку и сдвигать ее влево или вправо. Когда одна фигурка упала, машина сбрасывает следующую. Задача — уложить эти фигурки так, чтобы заполнить какой-нибудь горизонтальный ряд. Если игроку удается сделать это, не оставив в ряду пустых клеток, весь заполненный ряд с радостным хрюканьем исчезает. Игра заканчивается победой машины, если весь стакан окажется доверху засыпан фигурками так, что в каждом горизонтальном ряду останутся пустоты и ни один ряд уже не сможет исчезнуть. «Победа» игрока означает бесконечную игру. Реально всегда игра заканчивается, ибо человеку свойственно ошибаться, а коварный чертик где-то внутри компьютера изощряется, кидая все быстрее именно те фигурки, которые не желают укладываться так, как бы вам хотелось.

«Тетрис» стал одной из самых популярных компьютерных игр. Позже появились всевозможные его разновидности, но и самая первая, только что описанная, остается распространенной среди любителей поиграть с машиной. Наиболее дотошные «тетрисисты» исследовали существование выигрышной стратегии в этой игре и выяснили, что машина может «засыпать» игрока, даже предоставив ему право выбирать ширину ста-

кана и объявляя заранее свои ходы... Практический опыт игры в «Тетрис» показывает, что обычно программа обходится без этой стратегии, но для особо стойких игроков ее, возможно, следовало бы предусмотреть...

Вскоре обычный «Тетрис» начал надоедать, и тогда усилиями уже не только Пажитнова, но и многих других программистов из этого корня выросла обширная крона, где каждая веточка — «тетрисовидная» компьютерная игрушка. Здесь и объемный вариант игры, где стакан имеет не только ширину и высоту, но и длину; и вариант, в котором падают фигурки из любого количества квадратиков от одного до пяти, а не только из четырех: и игра, в которой падают только колонки из трех квадратов, зато квадраты эти разноцветные, и исчезают не только горизонтальные, но и вертикальные, и диагональные ряды из более чем трех квадратов одного цвета; и игра, в которой вовсе нет квадратов, а падают по три разноцветных шарика, которые рассыпаются, ударившись о дно стакана или другие шарики, раскатываются, скатываются при исчезновении одноцветных конфигураций на освободившиеся места, полностью меняя расположение уже нападавших ранее шариков...

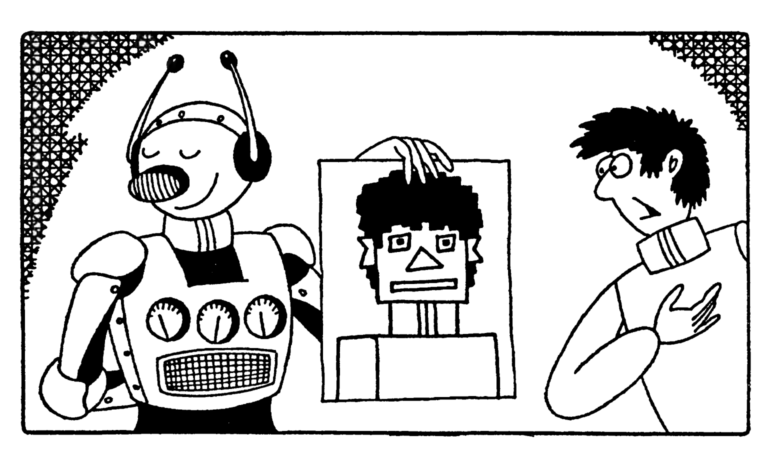
А что касается классического «Тетриса», его теперь можно приобрести на каждом углу — появились игровые электронные машинки, обученные «Тетрису». Правда, изо-

бражение там не цветное, но зато можно положить «Тетрис» в карман и не занимать для забавы компьютеры, нужные для куда более важных дел...

КОМПЬЮТЕР РИСУЕТ

Сначала **компьютер** научился рисовать графики, схемы и диаграммы. Потом — те же графики, схемы и диаграммы, но трехмерные; стал поворачивать изображения под разными углами, по желанию программистов и пользователей; наконец, его обучили показывать развитие картинки — как меняется со временем, скажем, спрос на товар, или как меняется график зависимости скорости от времени при уменьшении массы тела... И тут включились художники. Рисунок ничем не хуже сложного графика. Но зачем делать, например, для книжной иллюстрации множество эскизов на бумаге, если можно нарисовать их на экране компьютера? На экране легко исправить линию, если она «не туда пошла», можно попробовать разные варианты раскраски и выбрать наилучший. Наконец, как и график, картинку можно поворачивать, заставлять фигурку переставлять ноги или моргать глазами. С каким облегчением вздохнули художники-мультипликаторы, когда в их распоряжении оказались хорошо обученные ком-

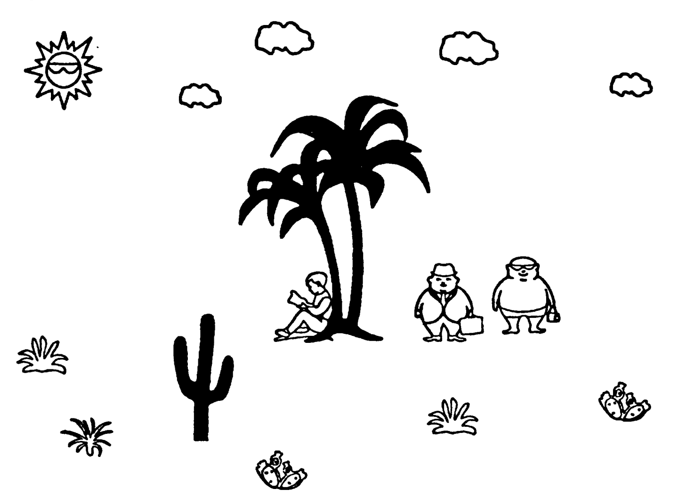
пьютеры! Ведь каждый рисованый мультфильм — это тысячи и тысячи рисунков, и каждый из них лишь чуть-чуть отличается от предыдущего. Если неаккуратно сделать их, изображение на экране будет дрожать и прыгать. Иногда это «дрожание» мультипликаторы используют как стилистический прием, но далеко не всегда и далеко не всем это нравится. А компьютеру ничего не стоит нарисовать необходимые серии рисунков, стоит лишь задать ему начальную и конечную картинку.



Правда, искусство иногда страдает от излишней компьютеризации. Все видели японские мультфильмы, в которых уж если герой бежит, то всегда одинаково, лица зачастую неподвижны и лишь изредка меняют выражения. Дети любят мультики и не придираютя к таким мелочам, но многих взрослых

это очень раздражает, например, авторов этого текста...

Практически каждому из вас приходилось играть в компьютерные игры. Все они — тоже мультфильмы (за исключением игр, приспособленных для микрокалькуляторов); но здесь играющий сам командует персонажу, куда ему идти, что делать, а программа в соответствии с заказом ее автора выполняет указания. Особенно красивы игры, написанные для хороших «быстро соображающих» машин с цветным монитором. И Диггер смешно перебирает лапками, копая нору, самолетик закладывает крутые виражи, а Принц изящно прыгает, бегает или ходит на цыпочках, нагибается за находкой, сражается на мечах, пьет, запрокидывая голову, жизнь из волшебного сосуда...



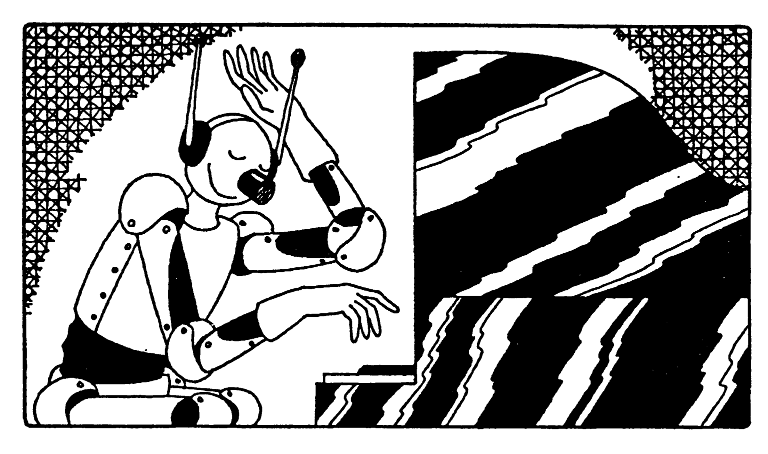
Рисунок, сделанный на компьюьере ученицей 7-го класса

МАШИНА-МУЗЫКАНТ

Идея научить машину сочинять музыку не нова — она появилась еще в XVI веке. Проблемами механизмов для музыкальных композиций занимались французский математик М.Мерсенн (1588—1648), немецкий ученый А.Кирхер (1602—1680), немецкий музыкант И.Ф.Кирнбергер (1721—1780), итальянский геометр Д.Кодацци (1824—1879), и многие другие. Разумеется, их проекты не имели отношения к компьютерам, поскольку компьютеров тогда не было.

Появление электронных машин вызвало естественное желание научить их искусству композиции — впрочем, машину пытались научить и сочинять стихи, и рисовать — с переменным успехом. Все же сама машина не создает произведений искусства — она лишь выполняет заказ автора со всей доступной ей тщательностью.

Известны три метода создания музыкальных произведений с помощью ЭВМ. Один из них — метод, при котором каждая следующая нота появляется в зависимости от нескольких предыдущих. Очень просто, но с точки зрения музыканта — плохо: в хорошей мелодии все ноты взаимосвязаны; кроме того, никак не учитывается ритмический рисунок... Другой метод основан на программировании правил композиции, найденных при исследовании музыкальной



классики или придуманных заново. Оба этих подхода предполагают «собственное творчество» машины, но фантазии она начисто лишена, поэтому новую музыку такими способами получить маловероятно. Вот если нужно сымитировать стиль какого-либо композитора, они хороши. В третьем случае композитор создает произведения при помощи машинных заготовок — каких-либо фрагментов, «обкатанных» на компьютере. Работа композитора заметно облегчается, но творит он сам. И здесь уже возникает настоящее искусство.

МАШИННЫЙ ПЕРЕВОД

На заре компьютерной эры, когда возможности машины казались безграничными (вот чуть усовершенствуется — и сможет все, что может человек!), возникла и мысль поручить машине перевод с одного языка на другой. Казалось — чего проще: загрузить в память словарь, грамматические правила — и в считанные минуты любой текст будет переведен. Много забавных анекдотов ходит о таких переводах. Вот один из них. Компьютер попросили перевести с одного языка на другой и обратно фразу из Священного Писания: «Крепок дух, хоть немощна плоть». Перевод гласил: «Запах сильный, хотя мясо размякло». Выходит, переводя слово за словом, можно получить нечто, не имеющее отношения к первоначальному тексту...

Как же быть? Как научить компьютер схватывать смысл фразы, а не отдельных слов? Как объяснить ему, какой из многих вариантов перевода одного и того же слова годится в данном случае? Задача трудная, но уж вовсе головоломная задача — научить машину переводить поговорки. Слова «шито белыми нитками» любой русский человек переведет в переносном смысле, но что делать бедному компьютеру, все понимающему буквально? Можно, конечно, все эти обороты внести в словарь машины. Но тогда словарь грозит разрастись до необъятных разме-

ров...Кроме того, не для всех поговорок одного языка есть аналоги в другом.

А уж что говорить о тех случаях, когда человек-переводчик вынужден делать примечание: «в оригинале — непереводимая игра слов»? У человека есть еще один выход — заменить игру слов автора своим вариантом на том языке, на который он переводит. Перевод превращается в пересказ, требующий немалой фантазии и изобретательности. (Не могу удержаться, чтобы не сослаться на замечательного переводчика-пересказчика с английского Григория Кружкова. В предисловии к книжке своих пересказов стихов Спайка Миллигана он рассказывает, как ему пришлось помучиться с совершенно непереводимыми текстами. Не писать же «яйцо рифмуется с ногой»: по английски рифмуется, а по-русски нет! Пришлось пересочинить заново: «Яйцо рифмуется с лицом. И это неспроста: В них много-много общего, К примеру, круглота...»)

Ясно, что машине это не под силу, и вряд ли когда-нибудь она сможет сравниться с человеком в литературном переводе...Тем не менее, машина переводит, и довольно успешно, научные статьи, документы, — словом, те тексты, в которых не требуется тонких смысловых оттенков, зато нужна точность. В подавляющем большинстве случаев в языке науки переводы слов однозначны: термин есть термин. Но перевод всегда тре-

бует внимательной проверки: встретив многозначное слово, машина может выбрать не тот вариант, какой вам подходит. И все же, хотя за этим переводчиком нужен глаз да глаз, черновой перевод он сделает быстрее любого знатока. Вам останется лишь «почистить» его. Как это облегчает жизнь, вы можете себе представить...

ПОЛОСКОВЫЙ КОД

Покупая иностранную газировку, конфеты или кофе, вы, разумеется, видели на упаковке наклейку с полосками и цифрами (автор даже однажды приобрел отечественную книжку из серии «Жизнь замечательных людей», помеченную полосатым кодом!). Что бы это значило?

Полосковый код — это один из способов записи чисел, цифровая система, довольно неудобная для человеческого глаза, но чрезвычайно удобная для компьютера. Каждую темную полоску электронный глаз понимает как единицу, каждую белую — пустую — как ноль. Некоторые темные полосы шире; это значит, что подряд идут несколько единиц; широкая светлая полоса — несколько нулей подряд. Сколько именно — компьютеру ясно сразу; нам же не так-то просто даже понять, где именно начинается серия полос, соответствующая одной цифре. Попробуем все же разобраться.

Начало и конец каждого полосатого ярлыка отмечены серией из трех узких полос: черная — белая — черная (101). Это знаки для компьютера: «начался номер товара», «закончился номер товара». Середина кода обозначена серией из пяти полос: белая — черная — белая — черная — белая (01010). Левая и правая части кода записываются «зеркально» — там, где слева рисуется темная полоса, справа будет белая (см. рисунок и таблицу). Зачем? А дело в том, что всякое может случиться: допустим, кассирша в магазине, оборудованном суперсовременной техникой, не той стороной положила бутылку «пепси», и код прочитался задом наперед. Чтобы не было путаницы и с вас не спросили цену, скажем, французского коньяка, который вы не брали, у компьютера должна быть возможность сразу обнаружить ошибку. Он и сделает это, увидев, что вместо «левых» цифр ему предъявляют «правые», прочтет запись задом наперед и правильно определит, с каким товаром имеет дело. Кодировка каждой цифры — семиполосная; присмотревшись к таблице, вы увидите, что «левый» код любой



цифры содержит нечетное число единиц, т.е. темных полос, «правый» же, разумеется, наоборот — четное число единиц. Так что перепутать лево и право для компьютера будет весьма затруднительно.

Кроме того, полосковый код содержит в себе еще одну страховку от ошибки. Дело в том, что в любом таком коде утроенная сумма цифр, стоящих на четных местах, сложенная с суммой цифр, занимающих нечетные места, непременно делится на 10. Если произошла ошибка и какая-то цифра оказалась прочитанной неправильно, компьютер сразу заметит это. Лишь если сделано несколько ошибок, «компенсирующих» друг друга, эта проверка не выявит огреха; но такое событие чрезвычайно маловероятно.

Итак, огромное количество товаров — продукты, одежда, обувь, книги, лекарства и т.д. — оказались снабжены различными номерами, записанными в удобной для компьютера форме. В коде содержится, в частности, и информация о стране-изготовителе (например, первые две цифры кода 46 соответствуют России). В кассе достаточно показать полосатые ярлыки сканеру, и сумма покупок будет подсчитана молниеносно и без ошибок. В библиотеке компьютер сразу сообщит читателю, карточка которого помечена полосковым кодом, какие книги он брал, какие не вернул, и найдет — по полоскам же — информацию о нужной вам книжке...

В наших магазинах и библиотеках пока подобная техника не встречается. Но это время не за горами...

Левая часть кода		Правая часть кода	
1	0001101	1	1110010
2	0011001	2	1100110
3	0010011	3	1101100
4	0111101	4	1011100
5	0110001	5	1001110
6	0101111	6	1010000
7	0111011	7	1000100
8	0110111	8	1001000
9	0001011	9	110100

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗА

Можно ли научить машину читать? Разумеется! Специальная «пристройка» к компьютеру — **сканер** — способна отличить друг от друга не только белое и черное, но и различные оттенки серого; существуют и цветные сканеры.

Но сканер лишь рассматривает картинку и помогает воспроизвести ее на принтере. Прочесть же текст, различив в нем отдельные буквы и слова, сканер сам по себе не может. Нужна специальная программа, умеющая распознавать образ. Как отличить одну букву от другой?

Нужно проанализировать количество хвостиков, палочек, кружочков... Например, ла-

тинское V от латинского же U отличить чрезвычайно трудно. А если по какой-либо причине плохо пропечатан хвостик у русской «б»? Она становится неотличимой от «о»...

Поэтому-то программа, умеющая читать со сканера, частенько путается в буквах и то и дело спрашивает: «а это что такое? а, б, в или д?» — и вам приходится ей втолковывать, что к чему. И все равно, прочитать со сканера текст куда быстрее, чем перепечатывать его заново, особенно если текст большой.

Но проблема распознавания образа куда шире, чем задача различения букв. Компьютер удалось научить анализировать, скажем, рентгеновские снимки грудной клетки — есть ли подозрительные затемнения? Ведь это может быть след туберкулеза или рака. Конечно, машина проводит лишь предварительный отбор, а окончательно решает, что делать с пациентом, врач, но какое подспорье медикам! Можно точно так же изучать напряжение в каких-либо конструкциях — по картинке, которую выдает ультразвуковой «эхолокатор».

ПРЕДМЕТНО-ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Б

В

Г

Д

Е

Ж

З

И

К

Л

М

Н

О

П

С

Т

У

Ф

Х

Ц

Ч

Ш

Э

Я

СОДЕРЖАНИЕ

Научно-популярное издание

Я ПОЗНАЮ МИР

Детская энциклопедия
Математика

Авторы-составители:
канд. физ.-мат. наук ***Савин А. П.,***
Станцо В. В., Котова А. Ю.

Ответственный редактор ***О. Г.Хинн***
Редактор ***Н. В. Павлова***
Художник-оформитель ***А. В.Кардашук***
Художник-иллюстратор ***А. Е. Шабельник***
Чертежи ***А.О. Хоменко***
Технический редактор Н.Н.Хотулева

Подписано в печать с готовых диапозитивов 07.05.98. Формат 84×108[1]/32. Бумага типографская. Печать высокая с ФПФ. Усл. печ. л. 25,2. Усл. кр.-отт. 26,04. Доп. тираж 30 000 экз. Заказ 708.

ООО «Издательство АСТ-ЛТД». Лицензия В 175372 № 02254 от 03.02.97. 366720, РИ, г. Назрань, ул. Фабричная, 3.
Наши электронные адреса:
WWW.AST.RU
E-mail: AST@POSTMAN.RU

При участии ООО «Харвест». Лицензия ЛВ № 32 от 27.08.97. 220013, Минск, ул. Я. Коласа, 35-305.

Ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат ППП им. Я. Коласа. 220005, Минск, ул. Красная, 23.

Качество печати соответствует качеству предоставленных издательством диапозитивов.


m = 2 (n + 1)
АСТ